2007
COBENGE
XXXV Congresso Brasileiro
de Educação em Engenharia

APLICAÇÃO DE SEMINÁRIO NO ENSINO DE ESPAÇOS VETORIAIS

Patrícia Lizi de Oliveira Maggi – plomaggi@unicenp.edu.br
Centro Universitário Positivo – UnicenP
Rua Prof. Pedro Viriato Parigot de Souza, 5300
81280-330 – Curitiba - PR
Cláudio Marchand Krüger – kruger@unicenp.edu.br
Centro Universitário Positivo – UnicenP
Rua Prof. Pedro Viriato Parigot de Souza, 5300
81280-330 – Curitiba - PR

Resumo: *Neste artigo é apresentada a experiência de desenvolvimento de um seminário sobre Espaços Vetoriais com duas turmas de graduação em Engenharia Civil, no Centro Universitário Positivo. As atividades foram desenvolvidas dentro da disciplina de Álgebra Linear e Geometria Analítica. As turmas foram divididas em grupos de até quatro alunos e, para cada grupo, foi proposto um problema diferente. O exercício constava em determinar se o conjunto proposto era ou não um Espaço Vetorial. Após o desenvolvimento das atividades em grupo, os alunos apresentaram suas soluções ao restante da turma. Dois modelos de avaliação foram propostos. Na primeira turma a solução do problema teve peso de 10% da nota bimestral e a escolha do apresentador ficou a cargo dos alunos. Na segunda turma o seminário teve peso de 15% da nota bimestral, mas todos os alunos do grupo tiveram que apresentar uma parte do exercício, a critério do professor. O aluno que não soubesse demonstrar o axioma solicitado faria com que a equipe perdesse parte da nota do seminário. Desta forma, além de resolver o problema, o grupo deveria certificar-se de que todos os seus componentes tinham domínio do assunto. Apresentam-se os resultados, em termos de aprendizado, de participação dos alunos e de acertos das questões referentes ao assunto, na prova bimestral.*

Palavras-chave: *Espaços Vetoriais, Álgebra Linear, Ensino de Engenharia*

1 INTRODUÇÃO

Segundo Kolman (1998), o conceito de espaço vetorial ocorre em muitas aplicações na matemática e na engenharia. Ao estudar as propriedades e a estrutura de um espaço vetorial, entende-se não apenas as propriedades do $\Re^n$, mas de muitos outros espaços vetoriais importantes como o das matrizes, o dos polinômios e o das funções.

Apesar de sua importância dentro da disciplina de Álgebra Linear, pertencente ao ciclo básico da Engenharia Civil, o tópico Espaços Vetoriais tem causado grande resistência por parte dos alunos que apresentam dificuldade em entender a definição e em verificar se um dado conjunto constitui ou não um espaço vetorial. Este trabalho apresenta uma proposta de dinâmica de ensino que busca envolver o aluno na solução de um problema.

2 APRESENTAÇÃO DA DINÂMICA

Propõe-se o desenvolvimento de trabalho em grupo de até quatro alunos. Cada grupo é responsável por verificar se um conjunto é ou não um espaço vetorial. Após a verificação dos axiomas, o grupo deve apresentar o exercício desenvolvido para a turma. Antes da realização do seminário sobre espaços vetoriais é realizada uma aula expositiva onde é apresentada a definição de espaço vetorial real e alguns teoremas úteis para verificação de propriedades de um espaço vetorial. O assunto Subespaços é apresentado à turma depois da realização do seminário.

2.1 Fundamentação teórica

Um espaço vetorial real é definido como um conjunto de elementos ***V*** munido de duas operações, soma de vetores e multiplicação de vetor por escalar, tais que sejam obedecidos os axiomas:

(α) Se $\overline{u}$ e $\overline{v}$ são elementos de ***V***, então $\overline{u}+\overline{v}$ está em ***V***, ou seja, ***V*** é fechado em relação à operação de adição de vetores.

(1) $\overline{u}+\overline{v}=\overline{v}+\overline{u}$, se $\overline{u}$ e $\overline{v}$ pertencem a ***V***.

(2) $\overline{u}+(\overline{v}+\overline{w})=(\overline{u}+\overline{v})+\overline{w}$, se $\overline{u}$, $\overline{v}$ e $\overline{w}$ pertencem a ***V***.

(3) Existe um elemento nulo $\overline{0}$ em ***V*** tal que $\overline{u}+\overline{0}=\overline{0}+\overline{u}=\overline{u}$, para todo $\overline{u}$ em ***V***.

(4) Para cada $\overline{u}$ em ***V*** existe um elemento negativo $-\overline{u}$ em ***V*** tal que $\overline{u}+(-\overline{u})=\overline{0}$.

(β) Se $\overline{u}$ é um elemento de ***V*** e r é qualquer número real, então $r\cdot\overline{u}$ está em ***V***, ou seja, ***V*** é fechado em relação à operação de multiplicação de vetor por escalar.

(5) $r\cdot(\overline{u}+\overline{v})=r\cdot\overline{u}+r\cdot\overline{v}$, para todo número real r e todos os elementos $\overline{u}$ e $\overline{v}$ em ***V***.

(6) $(r+s)\cdot\overline{u}=r\cdot\overline{u}+s\cdot\overline{u}$, para todos os números reais r e s e todo elemento $\overline{u}$ em ***V***.

(7) $r\cdot(s\cdot\overline{u})=(r\cdot s)\cdot\overline{u}$, para todos os números reais r e s e todo elemento $\overline{u}$ em ***V***.

(8) $1\cdot\overline{u}=\overline{u}$, para todo elemento $\overline{u}$ em ***V***.

Os elementos de um espaço vetorial são chamados de vetores, podendo ser vetores do $\Re^n$, matrizes, polinômios, funções, etc.

Teorema: Se ***V*** é um espaço vetorial, então:

- $0 \cdot \overline{u} = \overline{0}$ para todo $\overline{u}$ em *V*.
- $r \cdot \overline{0} = \overline{0}$ para todo escalar r.
- Se $r \cdot \overline{u} = \overline{0}$ então $r = 0$ ou $\overline{u} = \overline{0}$.
- $-1 \cdot \overline{u} = -\overline{u}$ para todo $\overline{u}$ em *V*.

2.2 Critérios de avaliação

No ano de 2005, a dinâmica foi proposta para duas turmas de graduação do curso de Engenharia Civil do Centro Universitário Positivo. Para cada turma foi adotado um critério de avaliação. Para a turma do turno da noite, a atividade teve peso de 10% da nota bimestral e o grupo foi autorizado a escolher o componente da equipe que apresentaria o trabalho. Para a turma do turno da manhã, a atividade teve peso de 15% da nota bimestral e todos os componentes foram escalados para apresentar parte do trabalho, a critério da professora. Caso algum componente do grupo não soubesse apresentar o axioma selecionado, toda a equipe ficava prejudicada.

2.3 Exercícios propostos

Foram selecionados sete exercícios diferentes para serem distribuídos às equipes. Estes exercícios serão apresentados a seguir.

Exercício tipo 1

Verificar se o conjunto $V = \{(x, y) \mid x, y > 0\}$ é um espaço vetorial com as operações:

Adição:
$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2)$

Multiplicação por escalar:
$c \cdot (x_1, y_1) = (x_1^c, y_1^c)$

Resposta: Este conjunto é um espaço vetorial, pois satisfaz todos os axiomas da adição e da multiplicação. O desenvolvimento encontra-se no anexo 1.

Exercício tipo 2

Verificar se o conjunto $V = \{(x, y) \mid y = 2x\}$ é um espaço vetorial com as operações usuais de adição de vetores e multiplicação de vetores por escalar.

Resposta: Este conjunto é um espaço vetorial, pois satisfaz todos os axiomas da adição e da multiplicação. O desenvolvimento encontra-se no anexo 2.

Exercício tipo 3

Verificar se o conjunto $V = \left\{ \begin{bmatrix} x & y & 0 \\ 0 & x & y \\ x & 0 & y \end{bmatrix} \middle| \; x, y \in \Re \right\}$ é um espaço vetorial com as operações usuais de adição de matrizes e multiplicação de matrizes por escalar.

Resposta: Este conjunto é um espaço vetorial, pois satisfaz todos os axiomas da adição e da multiplicação. O desenvolvimento encontra-se no anexo 3.

Exercício tipo 4

Verificar se o conjunto $V = \left\{ \begin{bmatrix} x-3y \\ y-x \\ x \\ y \end{bmatrix} \middle| \ x, y \in \Re \right\}$ é um espaço vetorial com as operações usuais de adição de vetores e multiplicação de vetores por escalar.

Resposta: Este conjunto é um espaço vetorial, pois satisfaz todos os axiomas da adição e da multiplicação.

Exercício tipo 5

Verificar se o conjunto $V = \left\{ \begin{bmatrix} 2t \\ 0 \\ -t \end{bmatrix} \middle| \ t \in \Re \right\}$ é um espaço vetorial com as operações usuais de adição de vetores e multiplicação de vetores por escalar.

Resposta: Este conjunto é um espaço vetorial, pois satisfaz todos os axiomas da adição e da multiplicação.

Exercício tipo 6

Verificar se o conjunto $V = \{at^2 + bt + c \mid a, b, c \in \Re \text{ e } a \neq 0\}$ é um espaço vetorial com as operações usuais de adição de polinômios e multiplicação de polinômio por escalar.

Resposta: Este conjunto não é um espaço vetorial, pois não satisfaz todos os axiomas da adição e da multiplicação. O desenvolvimento encontra-se no anexo 4.

Exercício tipo 7

Verificar se o conjunto $V = \{ax^2 + 1 \mid a \in \Re\}$ é um espaço vetorial com as operações usuais de adição de polinômios e multiplicação de polinômio por escalar.

Resposta: Este conjunto não é um espaço vetorial, pois não satisfaz todos os axiomas da adição e da multiplicação. O desenvolvimento encontra-se no anexo 5.

3 RESULTADOS

Quanto à participação dos alunos, verificou-se grande envolvimento no desenvolvimento de uma dinâmica de aula diferente do usual, já que a maioria das aulas de Álgebra Linear é desenvolvida de forma expositiva. Todos os grupos foram capazes de concluir o exercício proposto dentro do tempo disponível para um encontro de uma hora e quarenta minutos. Na turma da noite, algumas equipes concluíram o trabalho antes do término da aula. Na turma da manhã, os alunos ocuparam todo o tempo disponível, pois além de terminar o exercício, preocuparam-se em garantir que todos os componentes da equipe entendessem o que tinha sido feito.

Observou-se entusiasmo dos alunos para apresentação oral dos trabalhos, apesar da grande dificuldade que alguns demonstraram em fazer uma apresentação oral diante do restante da turma. O seminário, no qual foram realizadas as apresentações, ocupou dois encontros de uma hora e quarenta minutos cada.

Na turma da noite, todos os apresentadores escolhidos pela equipe souberam apresentar de forma satisfatória o exercício proposto. Na turma da manhã, apenas três alunos, entre os vinte e seis presentes, não souberam apresentar razoavelmente seu exercício e acabaram prejudicando a nota da equipe.

As apresentações foram realizadas sob um clima descontraído, mas houve respeito aos colegas que estavam apresentando e atenção por parte dos alunos que estavam assistindo.

Em termos do aproveitamento na prova bimestral que versava sobre este assunto, a porcentagem de acertos da questão referente a Espaços Vetoriais foi 40% maior na turma da manhã. Este resultado não pode ser associado unicamente à forma de avaliação do seminário, pois, a média anual da turma da manhã foi 9% maior que a da turma da noite.

4 CONCLUSÕES

Não foi possível analisar, com precisão, o impacto do procedimento de ensino proposto, na porcentagem de acertos de questão em prova. Porém, resultados qualitativos demonstraram a eficiência do método, pois, em anos anteriores, observava-se grande dificuldade dos alunos em aprender ou até mesmo em tentar aprender o assunto Espaços Vetoriais em aulas expositivas associadas a exercícios individuais. Com a dinâmica proposta, conseguiu-se obter participação e envolvimento de todos os alunos das duas turmas, que além de desenvolverem, sem o auxílio do professor, o raciocínio para solução do problema proposto, preocuparam-se com a forma de exposição da solução ao restante da turma de forma clara e didática.

5 ANEXOS

5.1 Anexo 1

Exercício proposto: verificar se o conjunto $V = \{(x, y) \mid x, y > 0\}$ é um espaço vetorial com as operações:

Adição:
$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2)$

Multiplicação por escalar:
$c \cdot (x_1, y_1) = (x_1^c, y_1^c)$

Solução: sendo $\overline{u} = (x_1, y_1)$, $\overline{v} = (x_2, y_2)$ e $\overline{w} = (x_3, y_3)$, realiza-se a verificação dos axiomas.

(α) $\overline{u} + \overline{v} = (x_1 x_2, y_1 y_2)$

Se x_1 e x_2 são reais maiores que zero, $x_1 x_2$ e $y_1 y_2$ também são reais maiores que zero. Portanto o conjunto é fechado em relação à adição de vetores.

(1) $\overline{u}+\overline{v}=(x_1x_2, y_1y_2)$

$\overline{v}+\overline{u}=(x_2, y_2)+(x_1, y_1)$
$\overline{v}+\overline{u}=(x_2x_1, y_2y_1)$

Como $x_1x_2 = x_2x_1$ e $y_1y_2 = y_2y_1$, o axioma (1) é satisfeito.

(2) $\overline{u}+(\overline{v}+\overline{w})=(x_1, y_1)+[(x_2, y_2)+(x_3, y_3)]$
$\overline{u}+(\overline{v}+\overline{w})=(x_1, y_1)+(x_2x_3, y_2y_3)$
$\overline{u}+(\overline{v}+\overline{w})=(x_1x_2x_3, y_1y_2y_3)$

$(\overline{u}+\overline{v})+\overline{w}=(x_1x_2, y_1y_2)+(x_3, y_3)$
$(\overline{u}+\overline{v})+\overline{w}=(x_1x_2x_3, y_1y_2y_3)$

Como $\overline{u}+(\overline{v}+\overline{w})=(\overline{u}+\overline{v})+\overline{w}$, o axioma (2) é satisfeito.

(3) Sendo $\overline{0}=(x_o, y_o)$

$\overline{u}+\overline{0}=(x_1x_o, y_1y_o)$

$\overline{u}+\overline{0}=\overline{u}$
$(x_1x_o, y_1y_o)=(x_1, y_1)$
$x_1x_o = x_1$
$x_o = 1$
$y_1y_o = y_1$
$y_o = 1$

Existe um vetor nulo $\overline{0}=(1,1)$, pertencente a ***V***, pois 1 > 0, portanto o axioma (3) é satisfeito.

(4) Sendo $-\overline{u}=(x, y)$

$\overline{u}+(-\overline{u})=(x_1, y_1)+(x, y)$
$\overline{u}+(-\overline{u})=(x_1x, y_1y)$

$\overline{u}+(-\overline{u})=\overline{0}$
$(x_1x, y_1y)=(1,1)$
$x_1x = 1$
$x=\frac{1}{x_1}$
$y_1y = 1$

$$y = \frac{1}{y_1}$$

Se x_1 e x_2 são reais maiores que zero, $\frac{1}{x_1}$ e $\frac{1}{y_1}$ são maiores que zero. Portanto o axioma (4) é satisfeito.

(β) $r \cdot \overline{u} = (x_1^r, y_1^r)$

Se x_1 e x_2 são reais maiores que zero, x_1^r e y_1^r são maiores que zero para quaisquer valores de r, portanto o conjunto é fechado em relação à multiplicação por escalar.

(5) $r \cdot \left(\overline{u} + \overline{v}\right) = r \cdot (x_1 x_2, y_1 y_2)$

$r \cdot \left(\overline{u} + \overline{v}\right) = [(x_1 x_2)^r, (y_1 y_2)^r]$

$r \cdot \overline{u} + r \cdot \overline{v} = (x_1^r, y_1^r) + (x_2^r, y_2^r)$

$r \cdot \overline{u} + r \cdot \overline{v} = (x_1^r x_2^r, y_1^r y_2^r)$

Como $(x_1 x_2)^r = x_1^r x_2^r$ e $(y_1 y_2)^r = y_1^r y_2^r$, o axioma (5) é satisfeito.

(6) $\left(r + s\right) \cdot \overline{u} = (x_1^{r+s}, y_1^{r+s})$

$r \cdot \overline{u} + s \cdot \overline{u} = (x_1^r, y_1^r) + (x_1^s, y_1^s)$

$r \cdot \overline{u} + s \cdot \overline{u} = (x_1^r x_1^s, y_1^r y_1^s)$

Como $x_1^r x_1^s = x_1^{r+s}$ e $y_1^r y_1^s = y_1^{r+s}$, o axioma (6) é satisfeito.

(7) $r \cdot \left(s \cdot \overline{u}\right) = r \cdot (x_1^s, y_1^s)$

$r \cdot \left(s \cdot \overline{u}\right) = [(x_1^s)^r, (y_1^s)^r]$

$\left(r \cdot s\right) \cdot \overline{u} = (x_1^{r \cdot s}, y_1^{r \cdot s})$

Como $(x_1^s)^r = x_1^{s \cdot r}$ e $(y_1^s)^r = y_1^{s \cdot r}$, o axioma (7) é satisfeito.

(8) $1 \cdot \overline{u} = (x_1^1, y_1^1)$

Como $(x_1^1, y_1^1) = \overline{u}$, o axioma (8) é satisfeito.

5.2 Anexo 2

Exercício proposto: verificar se o conjunto $V = \{(x, y) \mid y = 2x\}$ é um espaço vetorial com as operações usuais de adição de vetores e multiplicação de vetores por escalar.

Solução: sendo $\bar{u} = (a,2a)$, $\bar{v} = (b,2b)$ e $\bar{w} = (c,2c)$, realiza-se a verificação dos axiomas.

(α) $\bar{u} + \bar{v} = (a + b,2a + 2b)$

Como $2a + 2b = 2(a + b)$ o conjunto é fechado em relação à adição de vetores.

(1) $\bar{u} + \bar{v} = (a + b,2a + 2b)$

$\bar{v} + \bar{u} = (b + a,2b + 2a)$

Como $a + b = b + a$ e $2a + 2b = 2b + 2a$, o axioma (1) é satisfeito.

(2) $\bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (a,2a) + [(b,2b) + (c,2c)]$
$\bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (a,2a) + (b + c,2b + 2c)$
$\bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (a + b + c,2a + 2b + 2c)$

$(\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} = (a + b,2a + 2b) + (c,2c)$
$(\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} = (a + b + c,2a + 2b + 2c)$

Como $\bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w}$, o axioma (2) é satisfeito.

(3) Sendo $\bar{0} = (x_o, y_o)$

$\bar{u} + \bar{0} = (a + x_o,2a + y_o)$

$\bar{u} + \bar{0} = \bar{u}$
$(a + x_o,2a + y_o) = (a,2a)$
$a + x_o = a$
$x_o = 0$
$2a + y_o = 2a$
$y_o = 0$

Existe um vetor nulo $\bar{0} = (0,0)$, pertencente a ***V***, pois $0 = 2 \cdot 0$, portanto o axioma (3) é satisfeito.

(4) Sendo $-\bar{u} = (x, y)$

$\bar{u} + (-\bar{u}) = (a,2a) + (x, y)$
$\bar{u} + (-\bar{u}) = (a + x,2a + y)$

$\bar{u} + (-\bar{u}) = \bar{0}$
$(a + x, b + y) = (0,0)$
$a + x = 0$

$$x = -a$$
$$2a + y = 0$$
$$y = -2a$$

Existe o negativo de $\overline{u}$, $-\overline{u} = (-a,-2a)$, pertencente a ***V***. Portanto o axioma (4) é satisfeito.

(β) $r \cdot \overline{u} = (r \cdot a, r \cdot 2a)$

Como $r \cdot 2a = 2 \cdot r \cdot a$, o conjunto é fechado em relação à multiplicação por escalar.

(5) $r \cdot (\overline{u} + \overline{v}) = r \cdot (a + b, 2a + 2b)$
$r \cdot (\overline{u} + \overline{v}) = [r \cdot (a + b), r \cdot (2a + 2b)]$

$r \cdot \overline{u} + r \cdot \overline{v} = (r \cdot a + r \cdot 2a) + (r \cdot b, r \cdot 2b)$
$r \cdot \overline{u} + r \cdot \overline{v} = (r \cdot a + r \cdot b, r \cdot 2a + r \cdot 2b)$

Como $r \cdot (a + b) = r \cdot a + r \cdot b$ e $r \cdot (2a + 2b) = r \cdot 2a + r \cdot 2b$, o axioma (5) é satisfeito.

(6) $(r + s) \cdot \overline{u} = [(r + s) \cdot a, (r + s) \cdot 2a)]$

$r \cdot \overline{u} + s \cdot \overline{u} = (r \cdot a, r \cdot 2a) + (s \cdot a, s \cdot 2a)$
$r \cdot \overline{u} + s \cdot \overline{u} = (r \cdot a + s \cdot a, r \cdot 2a + s \cdot 2a)$

Como $(r + s) \cdot a = r \cdot a + s \cdot a$ e $(r + s) \cdot 2a = r \cdot 2a + s \cdot 2a$, o axioma (6) é satisfeito.

(7) $r \cdot (s \cdot \overline{u}) = r \cdot (s \cdot a, s \cdot 2a)$
$r \cdot (s \cdot \overline{u}) = (r \cdot s \cdot a, r \cdot s \cdot 2a)$

$(r \cdot s) \cdot \overline{u} = (r \cdot s \cdot a, r \cdot s \cdot 2a)$

Como $r \cdot (s \cdot \overline{u}) = (r \cdot s) \cdot \overline{u}$ o axioma (7) é satisfeito.

(8) $1 \cdot \overline{u} = (1 \cdot a, 1 \cdot 2a)$

Como $(1 \cdot a, 1 \cdot 2a) = (a, 2a)$, o axioma (8) é satisfeito.

5.3 Anexo 3

Verificar se o conjunto $V = \left\{ \begin{bmatrix} x & y & 0 \\ 0 & x & y \\ x & 0 & y \end{bmatrix} \middle|\, x, y \in \Re \right\}$ é um espaço vetorial com as operações usuais de adição de matrizes e multiplicação de matrizes por escalar.

Solução: sendo $\overline{u}=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ 0 & a_1 & b_1 \\ a_1 & 0 & b_1 \end{bmatrix}$, $\overline{v}=\begin{bmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ a_2 & 0 & b_2 \end{bmatrix}$ e $\overline{w}=\begin{bmatrix} a_3 & b_3 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 \\ a_3 & 0 & b_3 \end{bmatrix}$, realiza-se a verificação dos axiomas.

$$(\alpha)\ \overline{u}+\overline{v}=\begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 & 0 \\ 0 & a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ a_1+a_2 & 0 & b_1+b_2 \end{bmatrix}$$

Como $(\overline{u}+\overline{v})_{11}=(\overline{u}+\overline{v})_{22}=(\overline{u}+\overline{v})_{31}$, $(\overline{u}+\overline{v})_{12}=(\overline{u}+\overline{v})_{23}=(\overline{u}+\overline{v})_{33}$ e os demais elementos são iguais a zero, $\overline{u}+\overline{v}$ pertence a ***V***. O conjunto é fechado em relação à adição de vetores.

$$(1)\ \overline{u}+\overline{v}=\begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 & 0 \\ 0 & a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ a_1+a_2 & 0 & b_1+b_2 \end{bmatrix}$$

$$\overline{v}+\overline{u}=\begin{bmatrix} a_2+a_1 & b_2+b_1 & 0 \\ 0 & a_2+a_1 & b_2+b_1 \\ a_2+a_1 & 0 & b_2+b_1 \end{bmatrix}$$

Como $a_1+a_2=a_2+a_1$ e $b_1+b_2=b_2+b_1$, o axioma (1) é satisfeito.

$$(2)\ \overline{u}+\left(\overline{v}+\overline{w}\right)=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ 0 & a_1 & b_1 \\ a_1 & 0 & b_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_2+a_3 & b_2+b_3 & 0 \\ 0 & a_2+a_3 & b_2+b_3 \\ a_2+a_3 & 0 & b_2+b_3 \end{bmatrix}$$

$$\overline{u}+\left(\overline{v}+\overline{w}\right)=\begin{bmatrix} a_1+a_2+a_3 & b_1+b_2+b_3 & 0 \\ 0 & a_1+a_2+a_3 & b_1+b_2+b_3 \\ a_1+a_2+a_3 & 0 & b_1+b_2+b_3 \end{bmatrix}$$

$$\left(\overline{u}+\overline{v}\right)+\overline{w}=\begin{bmatrix} a_2+a_1 & b_2+b_1 & 0 \\ 0 & a_2+a_1 & b_2+b_1 \\ a_2+a_1 & 0 & b_2+b_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_3 & b_3 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 \\ a_3 & 0 & b_3 \end{bmatrix}$$

$$\left(\overline{u}+\overline{v}\right)+\overline{w}=\begin{bmatrix} a_1+a_2+a_3 & b_1+b_2+b_3 & 0 \\ 0 & a_1+a_2+a_3 & b_1+b_2+b_3 \\ a_1+a_2+a_3 & 0 & b_1+b_2+b_3 \end{bmatrix}$$

Como $\overline{u}+\left(\overline{v}+\overline{w}\right)=\left(\overline{u}+\overline{v}\right)+\overline{w}$, o axioma (2) é satisfeito.

(3) Sendo $\overline{0}=\begin{bmatrix} a_o & b_o & 0 \\ 0 & a_o & b_o \\ a_o & 0 & b_o \end{bmatrix}$

$$\overline{u}+\overline{0}=\begin{bmatrix} a_1+a_o & b_1+b_o & 0 \\ 0 & a_1+a_o & b_1+b_o \\ a_1+a_o & 0 & b_1+b_o \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1+a_o & b_1+b_o & 0 \\ 0 & a_1+a_o & b_1+b_o \\ a_1+a_o & 0 & b_1+b_o \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ 0 & a_1 & b_1 \\ a_1 & 0 & b_1 \end{bmatrix}$$

$a_1+a_o=a_1$

$a_o=0$

$b_1+b_o=b_1$

$b_o=0$

Existe um vetor nulo $\overline{0}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, pertencente a ***V*.** Portanto o axioma (3) é satisfeito.

(4) Sendo $-\overline{u}=\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ a & 0 & b \end{bmatrix}$

$$\overline{u}+(-\overline{u})=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ 0 & a_1 & b_1 \\ a_1 & 0 & b_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ a & 0 & b \end{bmatrix}$$

$$\overline{u}+(-\overline{u})=\begin{bmatrix} a_1+a & b_1+b & 0 \\ 0 & a_1+a & b_1+b \\ a_1+a & 0 & b_1+b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1+a & b_1+b & 0 \\ 0 & a_1+a & b_1+b \\ a_1+a & 0 & b_1+b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$a_1+a=0$

$a=-a_1$

$b_1+b=0$

$b=-b_1$

Existe o negativo de $\overline{u}$, $-\overline{u}=\begin{bmatrix} -a & -b & 0 \\ 0 & -a & -b \\ -a & 0 & -b \end{bmatrix}$, pertencente a *V*. Portanto o axioma (4) é satisfeito.

(β) $$r\cdot\bar{u}=\begin{bmatrix} r\cdot a_1 & r\cdot b_1 & 0\\ 0 & r\cdot a_1 & r\cdot b_1\\ r\cdot a_1 & 0 & r\cdot b_1\end{bmatrix}$$

Como $(r\cdot\bar{u})_{11}=(r\cdot\bar{u})_{22}=(r\cdot\bar{u})_{31}$, $(r\cdot\bar{u})_{12}=(r\cdot\bar{u})_{23}=(r\cdot\bar{u})_{33}$ e os demais elementos são iguais a zero, $r\cdot\bar{u}$ pertence a ***V*** o conjunto é fechado em relação à multiplicação por escalar.

(5) $$r\cdot\left(\bar{u}+\bar{v}\right)=r\cdot\begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 & 0\\ 0 & a_1+a_2 & b_1+b_2\\ a_1+a_2 & 0 & b_1+b_2\end{bmatrix}$$

$$r\cdot\left(\bar{u}+\bar{v}\right)=\begin{bmatrix} r\cdot(a_1+a_2) & r\cdot(b_1+b_2) & 0\\ 0 & r\cdot(a_1+a_2) & r\cdot(b_1+b_2)\\ r\cdot(a_1+a_2) & 0 & r\cdot(b_1+b_2)\end{bmatrix}$$

$$r\cdot\bar{u}+r\cdot\bar{v}=\begin{bmatrix} r\cdot a_1 & r\cdot b_1 & 0\\ 0 & r\cdot a_1 & r\cdot b_1\\ r\cdot a_1 & 0 & r\cdot b_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} r\cdot a_2 & r\cdot b_2 & 0\\ 0 & r\cdot a_2 & r\cdot b_2\\ r\cdot a_2 & 0 & r\cdot b_2\end{bmatrix}$$

$$r\cdot\bar{u}+r\cdot\bar{v}=\begin{bmatrix} r\cdot a_1+r\cdot a_2 & r\cdot b_1+r\cdot b_2 & 0\\ 0 & r\cdot a_1+r\cdot a_2 & r\cdot b_1+r\cdot b_2\\ r\cdot a_1+r\cdot a_2 & 0 & r\cdot b_1+r\cdot b_2\end{bmatrix}$$

Como $r\cdot(a_1+a_2)=r\cdot a_1+r\cdot a_2$ e $r\cdot(b_1+b_2)=r\cdot b_1+r\cdot b_2$, o axioma (5) é satisfeito.

(6) $$\left(r+s\right)\cdot\bar{u}=(r+s)\cdot\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0\\ 0 & a_1 & b_1\\ a_1 & 0 & b_1\end{bmatrix}$$

$$\left(r+s\right)\cdot\bar{u}=\begin{bmatrix} (r+s)\cdot a_1 & (r+s)\cdot b_1 & 0\\ 0 & (r+s)\cdot a_1 & (r+s)\cdot b_1\\ (r+s)\cdot a_1 & 0 & (r+s)\cdot b_1\end{bmatrix}$$

$$r\cdot\bar{u}+s\cdot\bar{u}=\begin{bmatrix} r\cdot a_1 & r\cdot b_1 & 0\\ 0 & r\cdot a_1 & r\cdot b_1\\ r\cdot a_1 & 0 & r\cdot b_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} s\cdot a_1 & s\cdot b_1 & 0\\ 0 & s\cdot a_1 & s\cdot b_1\\ s\cdot a_1 & 0 & s\cdot b_1\end{bmatrix}$$

$$r\cdot\bar{u}+s\cdot\bar{u}=\begin{bmatrix} r\cdot a_1+s\cdot a_1 & r\cdot b_1+s\cdot b_1 & 0\\ 0 & r\cdot a_1+s\cdot a_1 & r\cdot b_1+s\cdot b_1\\ r\cdot a_1+s\cdot a_1 & 0 & r\cdot b_1+s\cdot b_1\end{bmatrix}$$

Como $(r+s)\cdot a_1=r\cdot a_1+s\cdot a_1$ e $(r+s)\cdot b_1=r\cdot b_1+s\cdot b_1$, o axioma (6) é satisfeito.

(7) $$r\cdot\left(s\cdot\bar{u}\right)=r\cdot\begin{bmatrix} s\cdot a_1 & s\cdot b_1 & 0\\ 0 & s\cdot a_1 & s\cdot b_1\\ s\cdot a_1 & 0 & s\cdot b_1\end{bmatrix}$$

$$r\cdot\left(s\cdot\overline{u}\right)=\begin{bmatrix} r\cdot s\cdot a_1 & r\cdot s\cdot b_1 & 0 \\ 0 & r\cdot s\cdot a_1 & r\cdot s\cdot b_1 \\ r\cdot s\cdot a_1 & 0 & r\cdot s\cdot b_1 \end{bmatrix}$$

$$\left(r\cdot s\right)\cdot\overline{u}=\begin{bmatrix} r\cdot s\cdot a_1 & r\cdot s\cdot b_1 & 0 \\ 0 & r\cdot s\cdot a_1 & r\cdot s\cdot b_1 \\ r\cdot s\cdot a_1 & 0 & r\cdot s\cdot b_1 \end{bmatrix}$$

Como $r\cdot\left(s\cdot\overline{u}\right)=\left(r\cdot s\right)\cdot\overline{u}$ o axioma (7) é satisfeito.

(8) $1\cdot\overline{u}=\begin{bmatrix} 1a_1 & 1b_1 & 0 \\ 0 & 1a_1 & 1b_1 \\ 1a_1 & 0 & 1b_1 \end{bmatrix}$

Como $1\cdot a_1=a_1$ e $1\cdot b_1=b_1$, o axioma (8) é satisfeito.

5.4 Anexo 4

Exercício proposto: verificar se o conjunto $V=\left\{at^2+bt+c \mid a,b,c\in\Re \text{ e } a\neq 0\right\}$ é um espaço vetorial com as operações usuais de adição de polinômios e multiplicação de polinômio por escalar.

Solução: sendo $\overline{u}=a_1t^2+b_1t+c_1$, $\overline{v}=a_2t^2+b_2t+c_2$, realiza-se a verificação dos axiomas.

(α) $\overline{u}+\overline{v}=a_1t^2+b_1t+c_1+a_2t^2+b_2t+c_2$

$\overline{u}+\overline{v}=(a_1+a_2)t^2+(b_1+b_2)t+(c_1+c_2)$

Como a_1+a_2 pode ser igual a zero, caso $a_2=-a_1$, o conjunto não é fechado em relação à adição de vetores.

5.5 Anexo 5

Exercício proposto: verificar se o conjunto $V=\left\{ax^2+1 \mid a\in\Re\right\}$ é um espaço vetorial com as operações usuais de adição de polinômios e multiplicação de polinômio por escalar.

Solução: sendo $\overline{u}=a_1x^2+1$, $\overline{u}=a_2x^2+1$, realiza-se a verificação dos axiomas.

(α) $\overline{u}+\overline{v}=a_1x^2+1+a_2x^2+1$

$\overline{u}+\overline{v}=(a_1+a_2)x^2+2$

O conjunto não é fechado em relação à adição de vetores.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

KOLMAN, B. **Introdução à Álgebra Linear com aplicações**. Rio de Janeiro: LTC, 1998.

KRÜGER, C. M. **Curso de Álgebra Linear para Engenharia**. 80 p. Distribuição gratuita, por solicitação ao e-mail kruger@unicenp.edu.br . UnicenP. Curitiba. 2007.

APPLICATION OF SEMINARY IN TEACHING VECTORIAL SPACES

Abstract: *In this paper the experience of development of a seminary on Vectorial Spaces with two undergraduate classes in Civil Engineering of Centro Universitario Positivo is presented. The activities had been developed inside the discipline of Linear Algebra and Analytical Geometry. The students had been divided in groups of up to four, and for each group, a different problem was considered. The exercise consisted in determining if a proposed set was or not a Vectorial Space. After the development of the activities in the group, the students had to present its solutions to the remaining of the group. Two models of evaluation had been considered. In the first model, the solution of the problem had a weight of 10% of the bimonthly grade and each group chose the speaker. In the second model, the seminary had a weight of 15% of the bimonthly grade, but all the students in a group had to present a part of the exercise, under the criterion of the professor. If a requested student did not know to demonstrate the selected axiom, the team should lost part of the grade of the seminary. In this way, besides solving the problem, the group would have to certify that all its components had domain in the subject. The results are presented in terms of learning, participation of the students and correctness of the referring questions to the subject, in the bimonthly test.*

Key-words: *Vectorial spaces, Linear Algebra, Engineering Education.*