Anais do XXXIV COBENGE. Passo Fundo: Ed. Universidade de Passo Fundo, Setembro de 2006.
ISBN 85-7515-371-4

O PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL POR MEIO DE METÁFORAS E RECURSOS MULTIMÍDIA

Rodolfo Miranda de Barros – rodolfo@uel.br
Universidade Estadual de Londrina, Departamento de Computação
Rodovia Celso Garcia Cid, Pr 445 Km 380, Campus Universitário, Cx. Postal 6001
86051-990 – Londrina - Pr
Luís Geraldo Pedroso Meloni – meloni@decom.fee.unicamp.br
Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Av. Albert Einstein, 400, Cidade Universitária Zeferino Vaz, Cx. Postal 6101
13083-852 – Campinas - SP

Resumo: *O ensino de Cálculo nas universidades brasileiras tem sido objeto de questionamento em diversos fóruns em função das dificuldades apresentadas pelos alunos na sua aprendizagem, bem como pela alta evasão dos estudantes dos primeiros períodos matriculados nessa disciplina. Inserido neste contexto, este trabalho apresenta os resultados de uma pesquisa envolvendo o uso de metáforas e de recursos multimídia para auxiliar o professor na elaboração do material didático de aulas de Calculo Diferencial e Integral, buscando a melhoria do processo de ensino e aprendizagem tanto presencial como a distância.*

Palavras-chave: *Cálculo, Metáfora, Multimídia.*

1. INTRODUÇÃO

O Cálculo Diferencial e Integral figura entre as disciplinas básicas de diversos cursos superiores. Esta disciplina ajuda na resolução de problemas ligados às ciências físicas e à engenharia, bem como da biologia e das ciências sociais. Mais especificamente, os conceitos de Cálculo permitem tratar fenômenos tão diversos como a queda de um corpo, o crescimento populacional, o equilíbrio econômico, a propagação do calor e do som, entre outros. O Cálculo é um instrumento muito eficaz na modelagem de situações concretas que envolvem a idéia de taxa de variação.

Percebe-se que o Cálculo é uma das mais tradicionais disciplinas e que mais tem preservado sua estrutura original. Vale ressaltar que, apesar do surgimento de calculadoras e computadores, a estrutura do Cálculo é essencialmente a mesma desde o seu surgimento, no final do século 17, ou seja, há mais de 300 anos, quando Newton e Leibniz desenvolveram, independentemente, as idéias básicas do Cálculo. A metodologia usada pela maioria dos professores desta disciplina prioriza a aula expositiva, é centrada na fala do professor, e os conceitos são apresentados como verdades inquestionáveis, como algo pronto e acabado, sem a preocupação de torná-los significativos. Os alunos, por sua vez, acabam resolvendo os exercícios propostos mecanicamente, sem que se exija dos mesmos criatividade e reflexão frente aos problemas, o que os levam a questionar, muitas vezes, a razão da disciplina dentro de sua grade curricular. Ou seja, os cursos de Cálculo em geral, ainda hoje, priorizam mais as operações e técnicas de Cálculo do que a significação para o aluno.

Segundo LIMA e SAUER (2003), a matemática possui fundamentação lógica e exige formalização dos conceitos construídos em cada etapa, adequada a cada nível de desenvolvimento. Assim, não faz sentido tratar dos conhecimentos matemáticos como um conjunto de regras e fórmulas praticadas em situações modelos de aplicação. Mais importante que aplicar corretamente uma determinada regra é reconhecer primeiro sua devida aplicação. O conhecimento matemático é, por sua natureza, encadeado e cumulativo, do mesmo modo que na evolução das idéias. Portanto, é expressivo como possibilidade de significação respeitar a lógica própria dessa construção ao introduzir novos conceitos e auxiliar o aluno na re(construção) dos conceitos prévios, de acordo com as necessidades de estruturas que suportam um novo conhecimento. A essência não está no conhecimento em si, no nível de informação, mas na compreensão do seu significado.

De acordo com os dados publicados em 2000 pelo Ministério da Educação e Cultura – MEC[1], o índice de reprovação e abandono nos cursos iniciais de cálculo nas universidades brasileiras é aproximadamente de 80%.

Segundo alguns professores e estudiosos, o despreparo que os alunos herdam do ensino médio é um dos principais motivos que justificam os altos índices de reprovação e outros problemas nas aulas de Cálculo. De acordo com MIRANDA (2004), a reestruturação das ementas dos cursos de Cálculo, a introdução do Cálculo no ensino médio e, sobretudo, o equilíbrio entre o rigor e a intuição são questões que também merecem atenção. Outros alegam que o grande problema encontrado no ensino de Cálculo está relacionado com a dificuldade dos alunos em desenvolver habilidade para construir a compreensão dos conceitos matemáticos de tal forma que pudessem interpretar o significado dos conceitos, reconhecer quando aplicá-los e perceber a extensão e as limitações desta aplicabilidade, ou seja, o fato do aluno manipular corretamente a lógica simbólica para resolver uma determinada questão não implica necessariamente na compreensão do conceito utilizado. Estes conceitos muitas vezes são abstratos, o que dificulta ainda mais a compreensão dos alunos.

CONCEIÇÃO e GONÇALVES (2003) afirmam que nas disciplinas de Cálculo, exercícios de cálculo de derivadas e integrais são necessários, pois é através de uma série de exercícios que o aluno consegue aplicar as propriedades. É através deles que o aluno desenvolve e consolida habilidades. Este fato, no entanto, nem sempre fica claro para o aluno que, muitas vezes, considera enfadonho, cansativo e sem propósito a repetição continuada de uma certa prática. Os exercícios servem para consolidar e automatizar certas técnicas, habilidades e procedimentos necessários para a resolução de problemas, mas, dificilmente podem servir para a aprendizagem e compreensão de conceitos.

Segundo GONÇALVES e ZUNCHI (2003), as dificuldades relativas ao ensino e à aprendizagem de Cálculo no ensino superior, especificamente o conceito de limite, são há muito conhecidas. Essas dificuldades são encontradas ao longo da história da Matemática e envolvem os processos de conceitualização e instrumentalização deste conteúdo. Pesquisas a respeito do ensino e aprendizagem de Cálculo problematizam a apresentação geralmente formal dos enunciados matemáticos, de modo linearizado numa cadeia de resultados, que

[1] http://www.inep.gov.br/download/censo/2000/Superior/Sinopse_Superior-2000.pdf

parecem não admitir discussões. Ainda segundo os autores, as dificuldades começam a aparecer desde o conceito intuitivo de limite, pois se trabalha com números infinitesimais, com os quais o estudante não está acostumado. Também dependendo da situação utilizada, com a noção do infinito, por exemplo, aproximar a área de uma figura por n retângulos. As primeiras barreiras já começam a surgir neste contexto. Ao formalizar o conceito de limites, os obstáculos aumentam, pois neste momento, o aluno se depara com a formalização da linguagem matemática, a qual muitas vezes ele não entende. Um estudante do curso de Física descreveu suas dificuldades com a disciplina por meio da seguinte afirmação: "nunca haverá ninguém capaz de me explicar o conceito básico, em linguagem cotidiana".

Para resolver as dificuldades dos alunos, algumas estratégias são postas em prática, como: acusar o aluno de relapso, aumentar a lista de exercícios, explicar mais vezes o mesmo problema. Observa-se que o resultado não se altera, ou seja, a dificuldade continua presente.

Este é um quadro bastante alarmante que vem levando pesquisadores e professores a desenvolverem pesquisas, buscando tornar mais claro e fácil o processo de ensino e aprendizagem do Cálculo. Muitas dessas pesquisas utilizam o computador e softwares específicos para ajudar na compreensão e entendimento dos conceitos da disciplina. Outras, paralelamente ao uso do computador, introduzem problemas do cotidiano para que os alunos interpretem e desenvolvam uma solução para tais problemas.

Inserida neste contexto, esta pesquisa tem como objetivo utilizar metáforas e recursos multimídia na elaboração de material didático de cálculo, visando a melhoria do processo de ensino e aprendizagem desta disciplina. A pesquisa esta baseada nas perspectivas da cognição corporificada ou incorporada (Embodied Cognition), mais especificamente nos trabalhos de LAKOF e NÚÑEZ (2000), e no paradigma teórico-metodológico de David Ausubel, intitulado Aprendizagem Significativa (AUSUBEL et al, 1980).

Conceito tradicional e essencial para a compreensão do processo de significação da linguagem humana, a metáfora pode ser definida como uma transferência de significado que tem como base uma analogia: dois conceitos são relacionados por apresentarem, na concepção do falante, algum ponto em comum. Uma metáfora é usualmente empregada para esclarecer um conceito pouco familiar relacionando-o a outro conceito mais familiar, não o contrário.

Já a utilização da multimídia como recurso para o processo de ensino-aprendizagem pode trazer inúmeras vantagens, tais como: tornar o aprendizado mais agradável e interessante, devido à possibilidade da inclusão de sons, fotos, imagens, animações entre outros meios; tornar as aulas menos monótonas e despertar no aluno o interesse à investigação e à descoberta. Com a ajuda dessas ferramentas novas formas de se expressar os conceitos tornam-se viáveis, tais como experiências virtuais.

Segundo BARBOSA e QUEIROZ (2003), a aplicação de ferramentas multimídia na educação matemática introduz os educandos e educadores em um meio que possibilita a sondagem da validez de métodos propostos empiricamente e sanar barreiras epistêmicas adquiridas anteriormente e/ou durante esse processo.

Como os conceitos envolvidos na disciplina de Cálculo são bastante abstratos, a união das metáforas com os recursos multimídia, seria uma forma de transformar estes conceitos abstratos em concretos, facilitando o entendimento. Não se pretende com o uso de metáforas abandonar os conceitos desenvolvidos por Newton e Leibniz, mas sim utilizá-las no intuito de melhorar o processo de ensino-aprendizagem do Cálculo, contribuindo, desta forma, para o crescimento cognitivo do aluno.

Visando atender ao objetivo traçado por esta pesquisa, foram escolhidos alguns conceitos e expressões utilizadas na disciplina de cálculo para que fossem desenvolvidas as metáforas. Estes conceitos e expressões foram escolhidos baseados na experiência didática do professor orientador desta pesquisa, de entrevistas informais com alunos e ex-alunos da disciplina e por consultas à literatura que trata dos problemas envolvidos no processo de ensino e aprendizagem desta disciplina, tais como os trabalhos de David Tall[2]. As metáforas desenvolvidas foram: Infinito e Infinitésimo via Tabuleiro do Jogo de Xadrez; Infinito e Infinitésimo via Memória do Computador; Limite; “Se aproxima de” via Compasso; Reta Secante e Reta Tangente; Dividir para Conquistar; Máquina Digital Fotográfica; Aproximação.

Também foram escolhidas aplicações para estas metáforas, ou seja, como, didaticamente, as mesmas podem ser inseridas na apresentação de um conteúdo, visando, obviamente, facilitar o processo de aprendizagem. Foram escolhidos a Soma de Riemann e os Teores de Green, Stokes e Gauss como aplicações das metáforas.

Vale ressaltar que as metáforas desenvolvidas no escopo desta pesquisa possuem uma descrição e são, por vezes, acompanhadas de tabelas e gráficos ilustrativos para ajudar na compreensão do aluno. Algumas delas, além da descrição e gráficos, também trazem animações para contribuir com o aprendizado do aluno. As metáforas e as aplicações são arquivos HTML (HyperText Markup Language - Linguagem de Formatação de Hipertexto), possibilitando que o professor as utilize dentro de qualquer ferramenta de autoria, tal como o FrontPage da Microsoft (http://www.microsoft.com/), em qualquer ferramenta de gerenciamento de cursos a distância, tais como: o AULANET (http://guiaaulanet.eduweb.com.br/), o ADAPTWEB (PROENCA et. al, 2004)(OLIVEIRA et. al, 2003) e o WebCT (http://www.webct.com). Também podem ser utilizadas em aulas presenciais ministradas em laboratórios de informática ou ministradas em sala de aula, desde que esta sala disponha de um projetor multimídia para que as figuras, tabelas, gráficos e animações sejam acompanhadas pelos alunos. Outra forma do professor apresentar as metáforas e as aplicações seria por meio de um CD ROM, possibilitando que o aluno estude o conteúdo em um computador que não tenha acesso à Internet. Portanto, as opções são várias, mostrando uma grande portabilidade tanto para o professor como para o aluno, visto a possibilidade de se utilizar o conteúdo presencialmente ou à distância.

Para validação do proposto nesta pesquisa, foi realizado um estudo de caso em sala de aula, em que os alunos da disciplina de cálculo tiveram contato com as metáforas, com os recursos multimídia e com as aplicações, opinando se as mesmas efetivamente contribuíram ou não para o processo de aprendizado. Também foram realizadas entrevistas com alunos já aprovados na disciplina, questionando-os se as metáforas e os recursos multimídia poderiam contribuir para o aprendizado da disciplina.

Este trabalho está estruturado da seguinte forma: na próxima seção é apresentada uma fundamentação teórica que norteia esta pesquisa. Já a seção 2 apresenta algumas das metáforas desenvolvidas e a aplicação das mesmas nos Teoremas de Stokes e Gauss. Finalmente, na seção 3, são apresentadas as conclusões deste trabalho.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Segundo o dicionário Aurélio, cognição é “aquisição de conhecimento”. A cognição está relacionada ao processamento de informações, à capacidade de adaptação a situações diferentes, à resolução de problemas, à percepção do mundo e de nós mesmos. Portanto, pode-se dizer que a cognição é a capacidade de construir e dar significado ao conhecimento, apropriando-se dele, ou seja, está relacionada diretamente ao “saber que”, “saber como” e “saber quando e porque”,

[2]http://www.davidtall.com/papers

O fenômeno da cognição pode ser explicado, dentro de uma visão ecosófica[3] da cognição, sendo primeiro, como uma função biológica, que acontece no interior do sistema vivo, mantendo sua organização diante das perturbações que sofre; segundo, como um processo pedagógico, que resulta do histórico de inserção e acoplamento do sistema ao seu ambiente externo e, por último, por uma episteme[4] da observação, que reúne os pressupostos e raciocínios utilizados pelo observador do fenômeno (SILVA, 1998).

Segundo AUSUBEL (apud FARIA, 1989), a estrutura cognitiva é o conteúdo total e organizado de idéias de um certo indivíduo; ou, no contexto da aprendizagem de certos assuntos, refere-se ao conteúdo e organização de suas idéias naquela área particular de conhecimento. Ou seja, a ênfase que se dá é na aquisição, armazenamento e organização das idéias no cérebro do indivíduo.

Para Ausubel a estrutura cognitiva de cada indivíduo é extremamente organizada e hierarquizada, em que as várias idéias se encadeiam de acordo com a relação que se estabelece entre elas. Além disso, é nesta estrutura que se ancoram e se reordenam novos conceitos e idéias que o indivíduo vai progressivamente internalizando, aprendendo.

Ainda segundo Ausubel, a aprendizagem consiste na "ampliação" da estrutura cognitiva, através da incorporação de novas idéias a ela. Dependendo do tipo de relacionamento que se tem entre as idéias já existentes nesta estrutura e as novas que se estão internalizando, pode ocorrer um aprendizado que varia do mecânico ao significativo.

Segundo FIALHO (2001), o crescimento cognitivo é um processo lento, durante o qual a criança, a princípio completamente dependente da ação e da percepção, torna-se cada vez mais capaz de contar com o pensamento, à medida que constrói estruturas mentais de tempo, espaço, número, causalidade e classes lógicas, através das quais pode organizar suas experiências passadas, presentes e futuras.

Ainda segundo FIALHO (2001), o ponto de vista cognitivista sobre a aprendizagem insiste na importância dos conhecimentos anteriores. Um conhecimento não se constrói a partir do nada, esta construção supõe um conhecimento existente. Esta posição vai de encontro às propostas de Piaget quanto aos esquemas de assimilação, de Vygotski ao falar sobre a Zona de Desenvolvimento e de Lévy, quando discute a fractalidade das redes Hipertextuais de Significados.

Este ponto de vista, por outro lado, rompe com a tradição behaviorista[5], pela qual a aprendizagem é um processo cumulativo, que se junta ao existente, sem que haja uma interação com aquilo que já existe. Aquilo que é construído não depende daquilo que existe e não questiona o que existe.

Neste sentido, esta pesquisa propõe que as metáforas trabalhem como âncoras ou links para associarmos conhecimentos novos aos conhecimentos já existentes na estrutura cognitiva do indivíduo (aluno), o que vem de encontro com este ponto de vista cognitivista, ou seja, um conhecimento não se constrói do nada.

[3] Ecologia vem do grego *oikos*, "casa", e de *logos*, que significa "estudo". Assim, ecologia significa estudar a "casa", incluindo todos os organismos que nela habitam e todos os processos funcionais que a tornam habitável. A palavra "ecosofia" também deriva da mesma raiz grega *oikos*. O que diferencia é o sufixo. Enquanto *logos* quer dizer estudo, *sophia* significa "saber". Ecosofia significaria, então, "saber sobre a casa". A "casa", aqui não é apenas um espaço vazio, semeado de plantas e árvores frutíferas, mas um espaço habitado, onde atores individuais e coletivos competem em buscas independentes, cujos interesses são, vias de regra, conflitantes.

[4] Segundo o dicionário Aurélio, epistemologia é o estudo crítico dos princípios, hipóteses e resultados das ciências já constituídas, e que visa a determinar os fundamentos lógicos, o valor e o alcance objetivo delas.

[5] De acordo com a teoria behaviorista, o ser humano é "uma página em branco", preenchida, ao longo do seu desenvolvimento, pela interação com o ambiente. Os estímulos oferecidos por este suscitam respostas que, por sua vez, serão recompensadas ou punidas, reforçando ou extinguindo determinados comportamentos. Assim, aprendemos a repetir certos atos, enquanto "desaprendemos" outros, moldando, aos poucos, um conjunto de comportamentos que, somados, constituem uma espécie de repertório da nossa conduta frente ao mundo.

2.1 Embodied Cognition e as Metáforas

A Cognição Incorporada ou Corporificada (Embodied Cognition), segundo ANDERSON (2005), é um conjunto de ferramentas desenvolvidas pelos organismos para lidar com o ambiente ao redor.

Em NÚÑEZ e LAKOFF (2000) é apresentado um estudo sob cognição matemática sob a perspectiva da cognição corporificada (Embodied Cognition). Segundo os autores, muitos mecanismos cognitivos, que não são necessariamente matemáticos, são usados para caracterizar idéias matemáticas.

LAKOFF e JOHSON (1980), baseados principalmente na evidência lingüística, constataram que a maior parte de nosso sistema conceitual ordinário, em termos do qual pensamos e agimos, é de natureza metafórica. Para os autores, as metáforas são ligadas às percepções do mundo, a começar pela relação com o próprio corpo (corporificada). Ou seja, a mente e o corpo não são independentes. Sendo assim, as metáforas estão longe de serem fenômenos marginais, são de importância vital para o próprio funcionamento da mente humana, uma vez que sem a sua atuação constante, o pensamento em si se tornaria impossível.

De tão comuns na língua corrente, as metáforas passam muitas vezes despercebidas. Presentes, na própria estruturação do sistema conceitual, comum aos membros de uma cultura, as metáforas se evidenciam na língua. Como afirmam Lakoff e Johnson, essas metáforas estruturais convencionais não são raras, ao contrário, constituem a base do sistema conceitual do homem.

Metáfora Conceitual é um mecanismo cognitivo que nos permite estabelecer um mapeamento e fazermos inferências num domínio alvo, baseado em inferências que são válidas em outro domínio de experiência (fonte). Estes mapeamentos ou correspondências não são arbitrários e podem ser estudados empiricamente e definidos com precisão. Não são arbitrários porque são motivados pela nossa experiência diária. Assim o domínio alvo é entendido, freqüentemente inconscientemente, em termos das relações válidas no domínio fonte. Quando se diz que Ele não vai comprar aquela idéia, não existem semelhanças inerentes à "idéia" e "comprar" que justificariam a metáfora. O conceito de comprar um objeto é independente da metáfora, mas o de comprar uma idéia só surge graças à metáfora.

Percebeu-se que as correspondências metafóricas não são isoladas, mas ocorrem em sistemas complexos e combinam formas complexas. Tal como o resto do nosso sistema conceitual, o nosso sistema de metáforas conceituais convencionais é mantido sem esforço e reside abaixo do nosso nível de consciência. Ao contrário dos estudos tradicionais acerca da metáfora, a visão corporificada não vê as metáforas conceituais como residindo em palavras, mas no pensamento. Neste sentido, as expressões lingüísticas metafóricas são apenas manifestações superficiais do pensamento metafórico. O que é, fundamentalmente, importante no estudo dos sistemas conceituais abstratos, tais como a cognição matemática e a aprendizagem, é que a estrutura de inferência do domínio fonte é preservada em cada correspondência feita sobre o domínio alvo, isto é, a estrutura do esquema imagético do domínio fonte é preservada nas correspondências.

Segundo os autores, um mapeamento é a compreensão de que um objeto ou elemento em um espaço mental corresponde a outro objeto em outro espaço mental. Pode ser entendido como uma relação especial entre os dois espaços.

Para eles, o começo de toda a atividade cognitiva seria a experiência humana de lidar com o mundo externo. Os autores afirmam que as metáforas não têm como base similaridades preexistentes, inerentes aos conceitos, mas que são as próprias metáforas que criam essas semelhanças que, de outra maneira, não existiriam.

Um exemplo de mapeamento pode ser visto na Figura 1. Nela pode-se perceber que existe um mapeamento cognitivo que permite entender o tempo espacial em função do espaço físico. Quando se usa domínios que não são espaciais para falar sobre domínios espaciais, está se falando sobre coisas de natureza diferentes.

Domínio fonte – espacial		**Domínio alvo – tempo**
Coisas	→	Tempos
Seqüência de objetos	→	Ordem cronológica do tempo
Movimento horizontal de entrada na seqüência em uma direção	→	Passagem do tempo
Coisas orientadas na sua frente e sua direção de movimento	→	Tempos orientados na sua frente e sua direção de movimento
O objeto A atrás do objeto B numa seqüência	→	O tempo A ocorre antes do tempo B

Figura 1 - Exemplo de mapeamento entre espaço e tempo

3. APLICAÇÃO DAS METÁFORAS

Conforme citado na introdução deste trabalho, esta pesquisa desenvolveu uma série de metáforas para auxiliar no processo de ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral. As metáforas do Infinito e Infinitésimo via tabuleiro do jogo de xadrez, Dividir para Conquistar e Aproximação serão apresentadas neste trabalho, as demais podem ser encontradas em BARROS e MELONI (2005a), BARROS e MELONI (2005b) e BARROS e MELONI (2005c).

3.1 Metáfora do INFINITO E INFINITÉSIMO VIA tabuleiro do jogo de xadrez

Utilizando-se de uma linguagem popular (informal), diríamos que o infinito seria algo sem fim, que se repete ou que se caminha sem se encontrar um final. Obviamente, esse processo de repetição sem fim ou de caminhar sem se encontrar um final está além das atividades que fazemos no dia-a-dia, onde, por exemplo, viajamos de um lugar para outro, ou uma criança pula, pula, pula até se cansar.

Diz uma lenda que em um antigo reino do oriente médio um rei solicitou um serviço a um estranho viajante. O visitante cobrou o serviço em grãos de trigo, que seriam contados da seguinte forma: através do uso de um tabuleiro de xadrez de 64 casas, ele colocaria um grão na primeira casa, dois grãos na segunda casa, quatro grãos na terceira casa, dobrando sucessivamente até preencher todas as casas do tabuleiro de xadrez. Ao final, o rei pagaria com o número de grãos resultantes desta soma de grãos. Diz a lenda que o rei aceitou prontamente o preço do viajante, mas depois que realizou as contas descobriu que nem toda a produção de trigo de seu reino seria suficiente para pagar o viajante.

Estudos demonstram que os termos envolvidos na definição formal de limite criam dificuldades cognitivas nos alunos (TALL, 1992). Termos como 'tende a', 'se aproxima de', entre outros, geram dificuldades no processo de aprendizagem do Cálculo.

Para compreender o significado das expressões 'se aproxima de zero' (ou 'tende a zero') e 'tendendo para o infinito', faremos uma adaptação à lenda descrita anteriormente. O tabuleiro do xadrez possui 64 casas. Colocaremos 1 grão na primeira casa e, a partir da segunda, multiplicaremos por 10 a casa antecessora:

$$\text{Valor Máximo} = 10^{(\text{Número de Casas do Tabuleiro} - 1)} \qquad (1)$$

Obviamente, a ordem é crescente e finaliza com 10^{63} na última casa. Caso um novo tipo de tabuleiro fosse criado, por exemplo, com 128 casas, teríamos um número ainda maior na última casa, 10^{127}. Caso fizéssemos este processo de maneira repetitiva, ou seja, aumentássemos o número de casas, teríamos números cada vez maiores na última casa. Vamos definir o valor máximo da última casa do tabuleiro como sendo o infinito (uma quantidade que tende infinitamente a um certo número sem jamais ser exatamente este número). Percebe-se que quanto maior o número de casas do tabuleiro, maior será o valor máximo. Na verdade, este número tende para o infinito (Figura 2).

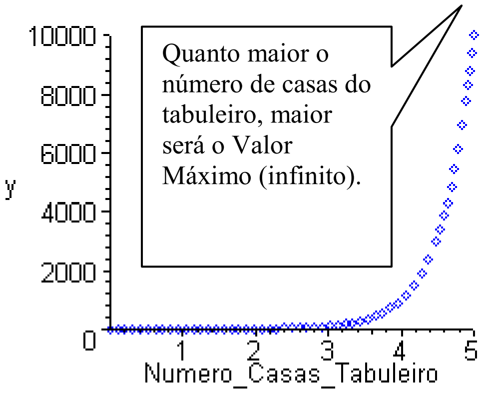

Figura 2 - Gráfico da função f

A partir do valor máximo (infinito), pode-se estender à expressão 'se aproxima de zero'. Para tanto, basta tomar o inverso do valor máximo (h), quanto maior o valor máximo (infinito), menor o valor do inverso h. Percebe-se também que h tende a zero, mas não chega a ser. Na verdade, este número nunca será zero, mas um número muito próximo de zero, ou seja, 'se aproxima de zero' ou 'tende a zero' (Figura 3).

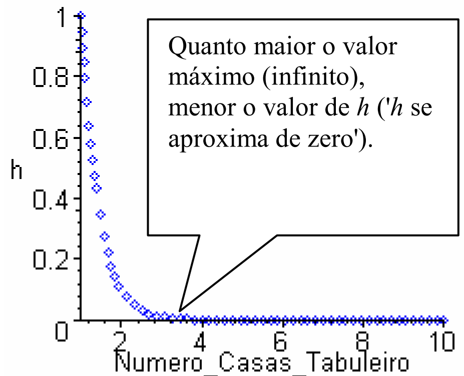

Figura 3 - Gráfico da função h ('x se aproxima de 0')

3.2 Metáfora dividir para CONQUISTAR

A metáfora dividir para conquistar é baseada numa tática de guerra do imperador romano Júlio César, que mandava espiões para semear discórdia nos países a serem conquistados, enfrequecendo-os. A idéia básica desta abordagem é a seguinte: um problema difícil é por vezes divisível num conjunto de problemas cuja resolução é relativamente fácil. Para tanto, podemos primeiramente dividir o problema em subproblemas (menores), em seguida resolver estas novas instâncias e, finalmente, intercalar os resultados desses subproblemas para achar a solução do problema principal, ou seja, dividir para alcançar o todo (conquistar o todo) (BARROS e MELONI, 2005b).

Para ajudar no entendimento desta metáfora, foi desenvolvida uma aplicação em MAPLE que gerou um gif animado. Gif animado é um conjunto de quadros, que se sobrepõem, dando a sensação de movimento à figura, da mesma forma que os desenhos animados. Os gifs animados oferecem aos professores uma poderosa ferramenta para mostrar o processo de evolução de algum fenômeno.

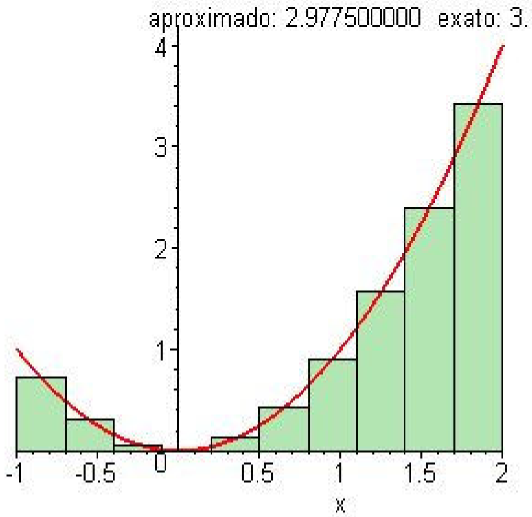

Figura 4 – Área sob a curva sendo dividida

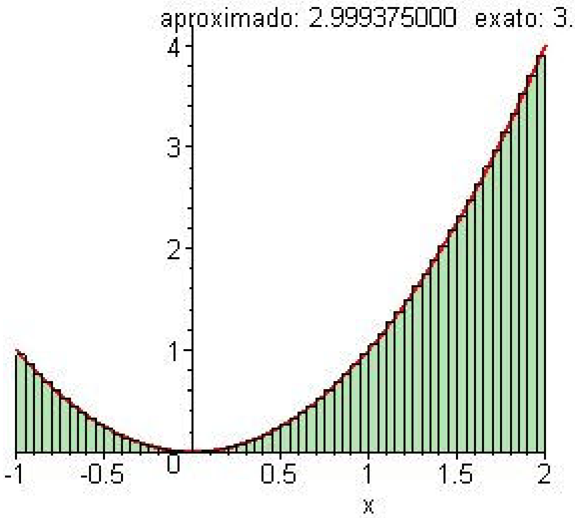

Figura 5 – Área sob a curva com mais divisões: dividindo para conquistar

Como se pode perceber na Figura 4 e na Figura 5, quanto maior a divisão, maior é o valor aproximado, ou seja, o resultado se aproxima mais do valor exato.

3.3 Metáfora da câmera fotográfica digital

Esta metáfora visa apresentar a questão da resolução de figuras ou imagens (espaço bi-dimensional). Este problema é bastante antigo e conhecido desde a transmissão das primeiras fotos a longas distâncias em jornais. Nitidamente, nestas fotos podia-se observar os pontos ou pixels que formam a imagem. A questão da resolução de uma imagem aparece em diversos aparelhos do cotidiano, tais como, monitores de vídeo, televisores, impressoras e na câmera fotográfica digital. Vale a pena observar que apenas o número de pixels de uma imagem não define a resolução da mesma. Por exemplo, tomando-se os monitores de computadores VGA de definição de 800x600 pixels, dependendo-se do tamanho do monitor, e.g. 14´´ ou 17´´, a resolução seria diferente. Para definir a resolução perceptiva é necessário fixar o número de pixels por unidade de medida, por exemplo, para impressoras, usa-se o número de pontos por polegadas (dpi - dots per inches) (BARROS e MELONI, 2005b).

Preferimos aqui empregar a metáfora da câmera fotográfica digital, onde se observa uma evolução da tecnologia com câmeras de 2, 3, 4, 5 ou mais megapixels. Para uma foto impressa em papel de tamanho médio (as dimensões exatas são irrelevantes), a resolução será crescente conforme o número de pixels da câmera. Em fotos impressas com contornos curvilíneos é mais difícil ou mesmo imperceptível observar distorções para câmeras de alta definição, mesmo quando se imprime em papel de grande tamanho.

A Figura 6 mostra uma aplicação desenvolvida em FLASH que possibilita se aproximar e se afastar de uma figura qualquer, mostrando a figura sob uma ótica diferente.

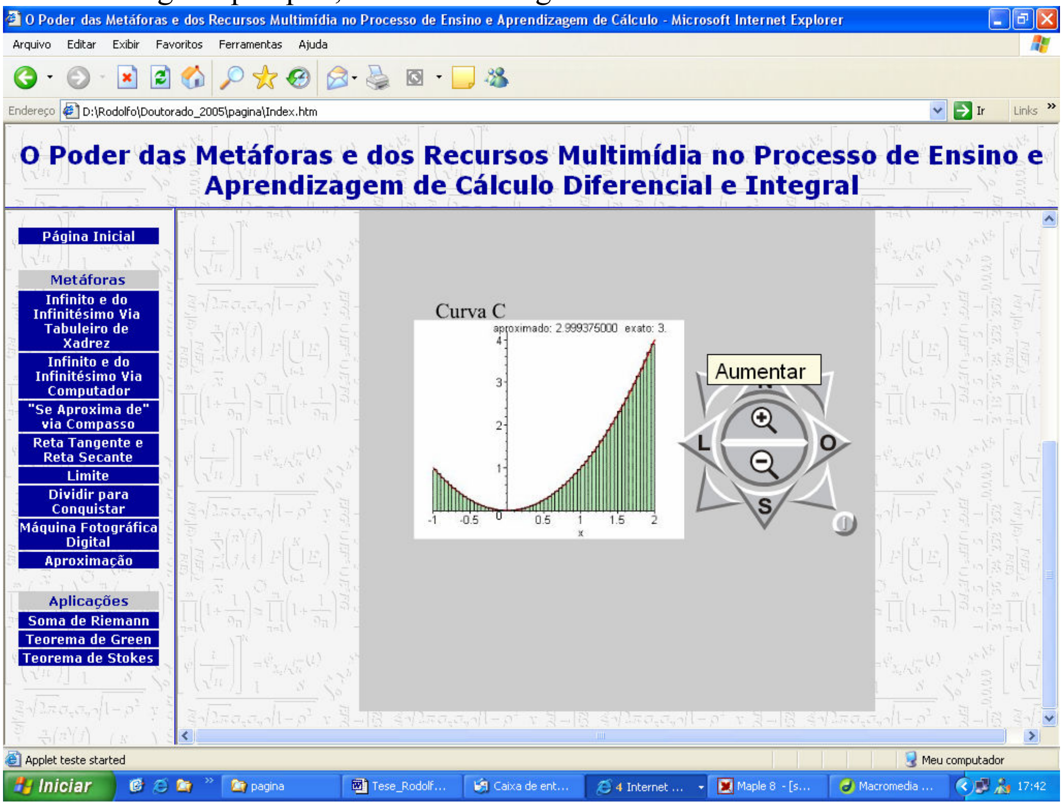

Figura 6 – Aplicação em FLASH que possibilita chegar mais próximo de uma figura (zoom in)

3.4 Aplicações das metáforas no teorema de Stokes

O bordo de uma superfície S é a curva que traça a beirada de S (como a bainha em volta de um pedaço de tecido). Uma orientação de S determina uma orientação para o seu bordo C como segue: escolha um vetor normal positivo n em S perto de C e use a regra da mão direita para determinar um sentido de percurso em torno de n. Isso, por sua vez, determina um sentido de percurso ao longo do bordo C.

O teorema de Stokes nos diz que: se S é uma superfície lisa orientada com bordo C liso por pedaços, orientado, e se F é um campo de vetores liso que é definido em S e C então:

$$\int_C \vec{F}.d\vec{r} = \int_S rot\vec{F}.d\vec{A} \qquad (2)$$

Em outras palavras, o teorema de Stokes nos diz que a integral da densidade de circulação sobre uma superfície é igual à circulação sobre o bordo da superfície.

Vamos explicar o teorema de Stokes, primeiramente, utilizando-se da metáfora dividir para conquistar. Subdividimos S em pedaços como se vê na superfície da Figura 7, ou seja, vamos dividir a superfície S em N regiões tão pequenas que possam ser consideradas planas e que o campo vetorial pela pequena superfície passa a ser considerado constante (Figura 8).

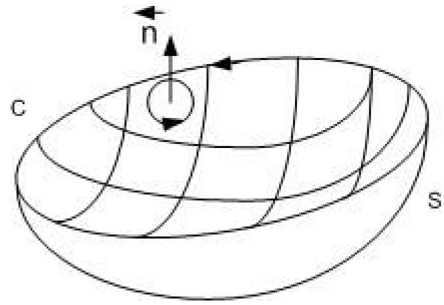

Figura 7 - Superfície S dividida em N regiões

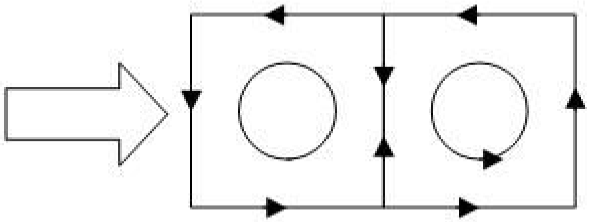

Figura 8 - Duas pequenas curvas fechadas adjacentes

Se $\vec{n}$ é um vetor unitário normal positivo num pedaço de superfície)A, então $\Delta\vec{A} = \vec{n}\Delta A$. Além disso, circ$\vec{n}$ $\vec{F}$ é a densidade de circulação $\vec{F}$ em torno de $\vec{n}$ de modo que:

Circulação de $\vec{F}$ em torno do bordo do pedaço . (circ$\vec{n}$ $\vec{F}$))A = ((rot$\vec{F}$).$\vec{n}$))A = rot$\vec{F}$.)A (3)

Na seqüência de raciocínio, faz-se o tamanho dos quadrados tender a zero (metáfora do infinitésimo do tabuleiro de xadrez). Em seguida, somamos as circulações em torno de todos os pequenos pedaços. A integral de linha ao longo da borda comum de pedaços adjacentes aparece com sinais opostos em cada pedaço de modo que se cancela. Quando somamos todos os pedaços, as bordas internas se cancelam e resta-nos a circulação em torno de C, o bordo da superfície toda. Assim:

Circulação em torno de C = 3 Circulação em torno dos bordos dos pedaços =3 rot$\vec{F}$.)A (4)

Tomando o limite quando)A → 0 (metáfora do infinitésimo do tabuleiro de xadrez) obtemos:

Circulação em torno de C = $\int_S rot\vec{F}.d\vec{A}$ (5)

A metáfora da câmera fotográfica digital pode ainda ser empregada na fronteira, onde os retângulos poderiam ser definidos por 4 pixels adjacentes. Conforme a resolução aumenta, os pequenos “degraus” tornam-se imperceptíveis, aproximando-se cada vez mais da curva C.

3.5 Aplicações das Metáforas no Teorema da Divergência ou Teorema de Gauss

O Teorema da Divergência é um análogo em várias variáveis do Teorema Fundamental do Cálculo. Diz que a integral da densidade de fluxo através de uma região sólida é igual a integral do fluxo através do bordo da região. Em outras palavras: Se w é uma região sólida cujo bordo S é uma superfície lisa por partes e se $\vec{F}$ é um campo de vetores liso definido em todo W e sobre S, então

$$\int_S \vec{F}.d\vec{A} = \int_W div\vec{F}.dV \tag{6}$$

onde a S é dada a orientação para fora.

O bordo de uma região sólida pode ser pensado como a pele entre o interior da região e o espaço em volta. Por exemplo, o bordo de uma bola sólida é uma superfície esférica, o bordo de um cubo sólido é constituído de suas seus faces e o bordo de um cilindro sólido é um tubo fechado nas duas extremidades por discos. Uma superfície que é o bordo de uma região sólida é chamada uma superfície fechada.

Considere uma região sólida W no 3-espaço cujo bordo é a superfície fechada S. Vamos explicar o Teorema de Gauss, primeiramente, utilizando-se da metáfora dividir para conquistar. Subdividindo W em pequenas caixas como se vê na Figura 9. Então para uma pequena caixa de volume)V, tem-se:

Fluxo para fora da caixa . Densidade de fluxo x Volume = $div\vec{F}$)V (7)

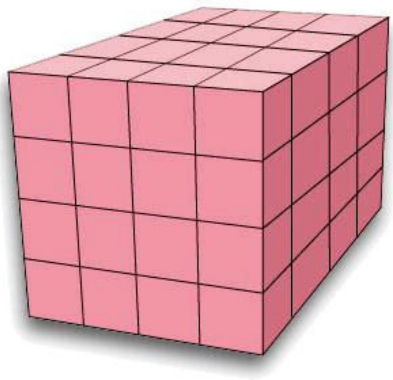

Figura 9 - Subdivisão da região W em pequenas caixas de volume)V

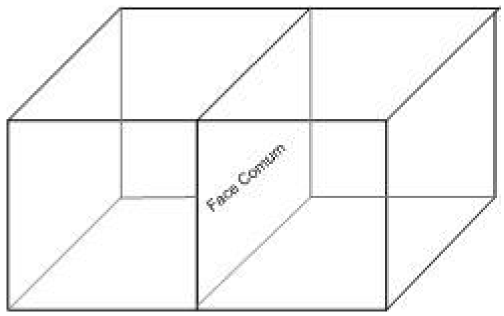

Figura 10 - Somar os fluxos para fora de caixas adjacentes

Quando somamos os fluxos para fora de todas as caixas, o fluxo através da face comum das caixas adjacentes (Figura 10) é contado duas vezes, um para fora da caixa de cada lado. Quando somamos estes fluxos estas contribuições se cancelam, portanto obtemos o fluxo para fora da região sólida formada unindo-se as duas caixas.

Na seqüência de raciocínio, faz-se a área das caixas tender a zero (metáfora do infinitésimo do tabuleiro de xadrez). Quando as caixas se tornam mais finas a soma se avizinha da integral de modo que:

Fluxo para fora da caixa de W = $\int_W div\vec{F}.dV$ (8)

4. CONCLUSÕES

A idéia básica desta pesquisa é auxiliar o processo de ensino-aprendizagem de cálculo, aumentando a compreensão, por parte do aluno, dos conceitos envolvidos. Não é intenção do trabalho abandonar os conceitos formais. As metáforas apresentadas são simples, buscam apresentar os conceitos por meio de uma linguagem ou exemplos mais próximos do aluno, da sua realidade, do seu dia-a-dia.

Após a realização de uma experiência preliminar em sala de aula, com aproximadamente 80 alunos, percebeu-se que o emprego das metáforas permite, além de uma maior compreensão, uma maior confiança no aprendizado por parte dos alunos, possibilitando que, muitas vezes, demonstrações mais tediosas fiquem num segundo plano do processo de ensino.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDERSON, M. L. **How to study the mind: An introduction to embodied cognition**. Cambridge: Cambridge Scholars Press, 2005.

AUSUBEL, D. P. *et al*. **Psicologia Educacional.** Rio de Janeiro: Interamericano, 1980.

BARBOSA, R.E.P.L.; QUEIROZ, L.C. Recursos multimídia aplicados à educação matemática. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 2003, Rio de Janeiro. **Anais.** Rio de Janeiro: UFRJ, 2003. P. 753-755.

BARROS, R.M.; MELONI, L.G.P. O Poder das metáforas e dos recursos multimídia no processo de ensino e aprendizagem de cálculo diferencial e integral. In: GLOBAL CONGRESS ON ENGINEERING AND TECHNOLOGY EDUCATION, 2005, Santos. **Anais**. Santos: Council of Researches in Education and Sciences, 2005a.

BARROS, R.M.; MELONI, L.G.P. O uso de metáforas para auxiliar o processo de ensino e aprendizagem de cálculo diferencial e integral. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, 2005, Campina Grande. **Anais.** Campina Grande: Associação Brasileira de Ensino de Engenharia, 2005b.

BARROS, R.M.; MELONI, L.G.P. Uma ferramenta para elaboração de material didático a distância utilizando-se de metáforas. In: CONFERÊNCIA IBERO-AMERICANA WWW/INTERNET, 2005, Lisboa. **Anais.** Lisboa: International Association for Development of the Information Society, 2005c.

CONCEIÇÃO, K.; GONÇALVES, M.B. A resolução de problemas no processo ensino-aprendizagem de matemática nos cursos de engenharia. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, 2003, Rio de Janeiro. **Anais.** Rio de Janeiro: Associação Brasileira de Ensino de Engenharia, 2003.

FARIA, W. **Aprendizagem e planejamento de ensino.** São Paulo, Ática, 1989.

FIALHO, F. A. P. **Ciências da Cognição**. Florianópolis: Insular, 2.001.

GONÇALVES, M.B.; ZUCHI, I. Investigação sobre os obstáculos de aprendizagem do conceito de limite. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, 2003, Rio de Janeiro. **Anais.** Rio de Janeiro: Associação Brasileira de Ensino de Engenharia, 2003.

LAKOFF, G.; JOHNSON, M. **Metaphors We Live By**. Chicago: The University of Chicago Press, 1980.

LAKOFF, G.; NÚNEZ, R. E. **Where mathematics comes from.** New York: Basic Books, 2000.

LIMA, I.G.; SAUER, L.Z. Uma proposta metodológica e sua contribuição para a aprendizagem de matemática na formação de engenheiros. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, 2003, Rio de Janeiro. **Anais.** Rio de Janeiro : Associação Brasileira de Ensino de Engenharia, 2003.

MIRANDA, G.A. **Silvanus Phillips Thompson e a desmistificação do Cálculo: Resgatando uma história esquecida.** 2004. Tese (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

SILVA, D.J. **Uma abordagem cognitiva ao planejamento estratégico.**1998. Tese (Doutorado em Engenharia da Produção) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

TALL, D. **Students' difficulties in calculus**. Plenary presentation in working group 3 at ICME 7, 1992.

THE DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS TEACHING-LEARNING PROCESS USING METAPHORS AND MUTIMEDIA RESOURCES

Abstract: *The teaching of Calculus in brazilian universities has been discussed through forums because of difficulties presented by the students in this theme, as the high evasion rates of students in the first periods. In this context, this paper presents the results of a research made with the use of metaphors and multimedia resources to help teachers elaborate didactic material for classes of Integral and Differential Calculus, looking for improvements in the process of teaching and learning in face to face and distance courses.*

Key-words: *Calculus, Metaphoros, Multimedia.*