



COBENGE 2005

XXXIII - Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia

"Promovendo e valorizando a engenharia em um cenário de constantes mudanças"

12 a 15 de setembro - Campina Grande - Pb

Promoção/Organização: ABENGE/UFCG-UFPE

SOLUÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM FIOS FINOS AQUECIDOS ELETRICAMENTE: APLICAÇÃO AO CASO DE LIGAS COM MEMÓRIA DE FORMA SEM TRANSFORMAÇÃO DE FASE

Fabio José C. França – fabio_ufcg@yahoo.com.br

Estudante de Graduação
Universidade Federal de Campina Grande
Departamento de Engenharia Mecânica
Caixa Postal: 10069
Cep: 58109-970, Campina Grande - PB

Celso Rosendo Bezerra Filho – celso@dem.ufcg.edu.br

Carlos José de Araújo – carlos@dem.ufcg.edu.br

Resumo: *A ativação de fios atuadores de ligas com memória de forma (LMF) é geralmente realizada através de aquecimento resistivo via efeito Joule. A passagem de corrente elétrica através desses fios origina uma contração devido à elevação da temperatura do material e uma elongação quando do seu resfriamento. Neste trabalho, apresenta-se aos estudantes de graduação em Engenharia como aplicar a lei da conservação da energia para obter um modelo físico que fornece a distribuição de temperaturas no fio LMF. Apresenta-se também ferramentas e conceitos matemáticos necessários a obtenção da solução do modelo. A solução analítica obtida foi usada para simular o processo de ativação elétrica, estimando os perfis de temperatura ao longo do comprimento bem como o aumento de temperatura em função do tempo para um ponto central do fio. As simulações realizadas também permitiram verificar a influência de parâmetros como o coeficiente de transferência de calor entre o fio e o meio ambiente, o diâmetro do fio e a corrente elétrica.*

Palavras-chave: *Transferência de calor, Efeito Joule, Ligas com memória de forma, Materiais inteligentes.*

1. INTRODUÇÃO

A intensa evolução tecnológica verificada na segunda metade do século XX resultou no advento de novos materiais capazes de interagir de alguma forma com parâmetros ambientais como temperatura, luz, campo magnético, campo elétrico, dentre outros. Estes materiais são hoje classificados na literatura internacional como materiais inteligentes, funcionais e ativos por natureza. Dentre os mais promissores encontram-se as cerâmicas piezelétricas, os polímeros eletro-ativos, os fluidos magneto-reológicos e as ligas com memória de forma (Culshaw, 1996;

Srinivasan & McFarland, 2001). As ligas com memória de forma (LMF) são materiais metálicos capazes de recuperar uma deformação plástica introduzida à baixa temperatura, por intermédio de um simples aquecimento. Assim sendo, esses materiais são sensíveis a uma variação de temperatura e capazes de movimentar-se quando deformados e convenientemente aquecidos. Este fenômeno surge devido a uma transformação de fase no estado sólido, do tipo martensítica termoelástica reversível, ocorrendo no interior do material em função da temperatura (Otsuka & Wayman, 1998). Conforme é ilustrado na Figura 1, uma amostra de fio desse material é deformada por uma carga constante a baixa temperatura e posteriormente aquecida, um movimento de uma posição baixa temperatura (PBT) para uma posição alta temperatura (PAT) é obtido, correspondendo ao fenômeno denominado efeito memória de forma (EMF).

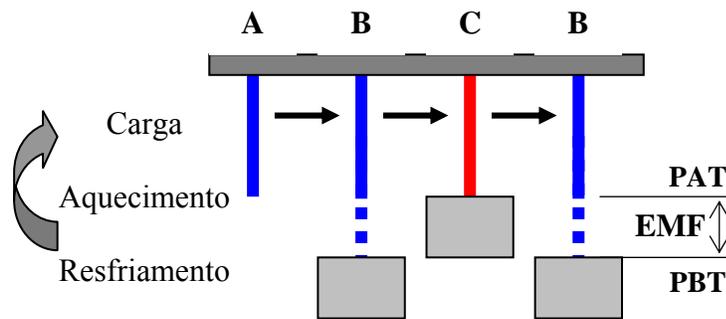


Figura 1 - Esquema do efeito memória de forma sob carga constante. **PAT** – Posição Alta Temperatura. **PBT** – Posição Baixa Temperatura. **EMF** – Efeito memória de forma.

Esse deslocamento sob carga corresponde a um trabalho mecânico e, portanto, o material é considerado intrinsecamente como um atuador que converte energia térmica em energia mecânica. Se a ciclagem térmica é realizada por uma variação controlada da temperatura do meio (radiação ou convecção), a LMF é considerada um “atuador térmico”. No entanto, quando o aquecimento é realizado pela passagem de corrente elétrica (efeito Joule), a LMF é considerada um “atuador elétrico” (Otsuka & Wayman, 1998). Neste sentido, quando fios finos de LMF são usados como atuadores elétricos ativados pela passagem de corrente, origina-se um problema de transferência de calor onde o maior interesse é estimar a distribuição de temperatura ao longo do comprimento do fio (Brailovski *et al*, 1996).

Os estudantes de graduação em Engenharia Mecânica e outras afins raramente têm a ocasião de adquirir conhecimentos específicos sobre esses materiais especiais em disciplinas clássicas, de tal forma que os conceitos semelhantes aquele descrito na Figura 1 são adquiridos apenas em projetos extra-curriculares ou através de trabalhos de conclusão de curso.

Neste trabalho um estudo teórico sobre a transferência de calor ao longo de fios finos de LMF é realizado visando à determinação dos perfis de temperatura originados nos fios quando da passagem de corrente elétrica, bem como a verificação da influência de alguns parâmetros térmicos e geométricos sobre esse processo. Por ser um primeiro estudo nessa direção, este trabalho não considerou a transformação de fase que ocorre nesses materiais, possibilitando assim a obtenção de uma solução analítica para o problema proposto. Desta forma, procura-se demonstrar aos estudantes de graduação a aplicação do princípio da conservação da energia para obtenção do modelo físico do problema e como utilizar as ferramentas e conceitos matemáticos para se estabelecer a solução da equação diferencial representativa do fenômeno em análise.

2. METODOLOGIA

2.1. Definição do problema físico para o caso de condução

Considere um fio fino preso em suas extremidades por blocos de capacidade calorífica elevada, cujas temperaturas são respectivamente T_1 e T_2 , conforme ilustra a Figura 2. Devido a grande capacidade calorífica dos blocos, suas temperaturas serão consideradas constantes durante todo o processo de aquecimento e resfriamento e iguais às temperaturas nas extremidades do fio. O corpo do fio está exposto ao ambiente a T_∞ e inicialmente está a temperatura T_0 . Faz-se então passar uma corrente elétrica I através do fio que provoca o seu aquecimento e produz um gradiente de temperatura entre o mesmo e o meio ambiente. A presença deste gradiente de temperatura provoca uma transferência de calor por convecção para o ambiente até que o regime permanente seja atingido. Neste instante, a corrente é desligada e o fio começa a resfriar. Na análise que será realizada todas as propriedades físicas do fio são consideradas constantes e conhecidas e a distribuição de temperatura é uma função da posição x e do tempo t .

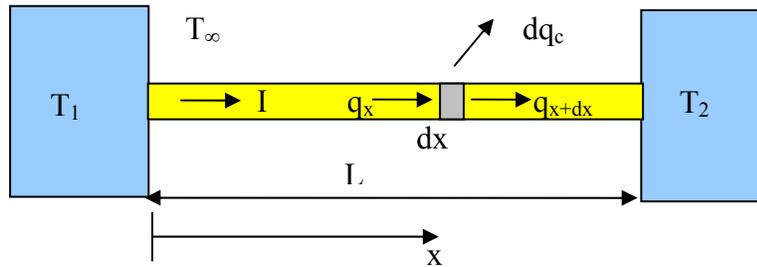


Figura 2. Esquema do problema de aquecimento resistivo de fios finos.

2.2. Modelo e Solução do problema de aquecimento

Para se obter o modelo matemático do problema em questão durante o aquecimento faz-se um balanço de energia através de um elemento diferencial de comprimento dx do fio, como ilustrado na figura 1. Do balanço de energia para o elemento considerado (Myers, 1971; Ozisik, 1993), resulta:

$$\dot{E}_e - \dot{E}_s + \dot{E}_g = \frac{dE}{dt} \quad (1)$$

em que \dot{E}_e , \dot{E}_s , \dot{E}_g e $\frac{dE}{dt}$ são respectivamente a taxa de energia que entra, a taxa de energia que sai, a taxa de energia gerada e a taxa de variação de energia no elemento de comprimento dx .

Observando a Figura 2, a equação acima passa a ser escrita como:

$$q_x - q_{x+dx} - dq_c + q_g = \frac{dU}{dt} \quad (2)$$

em que q_x , q_{x+dx} são respectivamente a taxa de calor que entra na face x , a taxa de calor que sai em $x+dx$, ambas por condução; dq_c é a taxa de transferência de calor por convecção do elemento considerado para o meio, q_g é o calor gerado devido à passagem da corrente elétrica através do elemento e dU/dt é a sua taxa variação de energia interna.

Expandindo q_{x+dx} e considerando apenas os termos até a primeira derivada, resulta:

$$q_x - \left[q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right] - dq_c + q_g = \frac{dU}{dt} \quad (3)$$

ou

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} dx - dq_c + q_g = \frac{dU}{dt} \quad (4)$$

Usando a lei da condução de Fourier para expressar q_x , a lei de resfriamento de Newton para expressar dq_c , a definição de calor específico a volume constante e expressando q por $\rho A dx$, resulta:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(-kA \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx - 2h\pi r dx (T - T_\infty) + gA dx = \rho dV c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (5)$$

em que k é a condutividade térmica do material do fio, A é a área da seção transversal do fio, h é o coeficiente de transferência de calor por convecção, r é o raio do fio, g é a taxa de energia gerada por unidade de volume, ρ é a massa específica do material do fio, dV é o volume do elemento considerado.

Dividindo tudo por $A dx$, resulta:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{2h}{r} (T - T_\infty) + g = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (6)$$

A solução da equação acima fornece a distribuição de temperatura T no fio.

Fazendo $\theta = T - T_\infty$, $\alpha = \frac{k}{\rho c}$ e $\beta^2 = \frac{2h}{kr}$ na equação (6) resulta a seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \beta^2 \theta + \frac{g}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (7)$$

De acordo com a formulação do problema, a condição inicial e as condições de contorno para o problema de aquecimento considerado são as seguintes:

$$\theta(x, 0) = T_0 - T_\infty = \theta_0 \quad (7a)$$

$$\theta(0, t) = T_1 - T_\infty = \theta_1 \quad (7b)$$

$$\theta(L, t) = T_2 - T_\infty = \theta_2 \quad (7c)$$

Sendo o problema linear, sua solução é dada por: $\theta(x,t) = \Gamma(x,t) + P(x)$, ou seja, soma do problema transiente com o problema permanente. Usando esta relação na equação (7) resulta:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}[\Gamma + P] - \beta^2[\Gamma + P] + \frac{g}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial T}[\Gamma + P] \quad (8)$$

De onde obtém-se:

a) Para o problema permanente:

$$\frac{d^2 P}{dx^2} - \beta^2 P + \frac{g}{k} = 0 \quad (9)$$

b) Para problema transiente:

$$\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2} - \beta^2 \Gamma = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Gamma}{\partial T} \quad (10)$$

A condição inicial e as condições de contorno são obtidas equações (7a), (7b) e (7c) como mostrado abaixo:

$$\theta(x,0) = \theta_0 \Rightarrow \Gamma(x,0) + P(x) = \theta_0 \Rightarrow \Gamma(x,0) = \theta_0 - P(x)$$

$$\theta(0,t) = \theta_1 \Rightarrow \Gamma(0,t) + P(0) = \theta_1, \text{ de onde obtém-se: } \Gamma(0,t) = 0 \text{ e } P(0) = \theta_1$$

$$\theta(L,t) = \theta_2 \Rightarrow \Gamma(L,t) + P(L) = \theta_2, \text{ de onde obtém-se: } \Gamma(L,t) = 0 \text{ e } P(L) = \theta_2$$

Portanto, a solução do problema será dada pela soma das soluções dos problemas abaixo:

a) Problema permanente:

$$\frac{d^2 P}{dx^2} - \beta^2 P + \frac{g}{k} = 0 \quad (11)$$

$$P(0) = \theta_1 \quad (11a)$$

$$P(L) = \theta_2 \quad (11b)$$

b) Problema transiente:

$$\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2} - \beta^2 \Gamma = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Gamma}{\partial T} \quad (12)$$

$$\Gamma(0, t) = 0 \quad (12a)$$

$$\Gamma(L, t) = 0 \quad (12b)$$

$$\Gamma(x, t) = \theta_0 - P(x) \quad (12c)$$

2.2.1 Solução do problema permanente

A equação (11) pode ser escrita como:

$$\frac{d^2P}{dx^2} - \beta^2 P = -\frac{g}{k} \quad (13)$$

Portanto, trata-se de uma equação diferencial linear não homogênea, cuja solução P é dada pela soma da solução da equação diferencial homogênea, P_h , e da solução particular, P_p , ou seja: $P = P_h + P_p$.

A equação homogênea do problema é:

$$\frac{d^2P_h}{dx^2} - \beta^2 P_h = 0 \quad (14)$$

A solução desta equação é da forma $P_h = e^{sx}$, logo:

$$s^2 e^{sx} - \beta^2 e^{sx} = 0 \Rightarrow s_1 = \beta \quad e \quad s_2 = -\beta$$

Assim, as soluções são: $P_{h1} = A_1 e^{s_1 x}$ e $P_{h2} = A_2 e^{s_2 x}$, onde A_1 e A_2 são constantes.

A solução particular é dada por: $P_p = \frac{g}{k\beta^2}$.

Portanto, a solução geral da equação (14) é dada por:

$$P(x) = A_1 e^{\beta x} + A_2 e^{-\beta x} + \frac{g}{k\beta^2} \quad (15)$$

As constantes A_1 e A_2 são determinadas utilizando as equações (11a) e (11b), o que resulta no sistema de equações abaixo:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + \frac{g}{k\beta^2} = \theta_1 \\ A_1 e^{\beta L} + A_2 e^{-\beta L} + \frac{g}{k\beta^2} = \theta_2 \end{cases}$$

Cuja solução fornece:

$$A_1 = \frac{e^{-\beta L} \left(\theta_1 - \frac{g}{k\beta^2} \right) - \left(\theta_2 - \frac{g}{k\beta^2} \right)}{e^{-\beta L} - e^{\beta L}} \quad (15a)$$

$$A_2 = \frac{\left(\theta_2 - \frac{g}{k\beta^2}\right) - e^{\beta L} \left(\theta_1 - \frac{g}{k\beta^2}\right)}{e^{-\beta L} - e^{\beta L}} \quad (15b)$$

Logo, a solução do problema permanente é dada pela equação (15) onde as constantes A_1 e A_2 são dadas pelas equações (15a) e (15b) respectivamente.

2.2.2. Solução da equação transiente

Utilizando o método de separação de variáveis, a solução da equação (12) é dada por:

$$\Gamma(x, t) = f(x)g_1(t) \quad (16)$$

Substituindo a equação (16) na equação (12) resulta a seguinte equação:

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{1}{\alpha g_1} \frac{dg_1}{dt} + \beta^2 \quad (17)$$

Como f é função apenas de x e g_1 é função apenas de t , a igualdade na equação (17) será satisfeita se a seguinte condição ocorrer:

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} = -\lambda^2 \quad (18)$$

$$\beta^2 + \frac{1}{\alpha g_1} \frac{dg_1}{dt} = -\lambda^2 \quad (19)$$

em que λ^2 é uma constante.

A solução da equação (19) é dada por:

$$g_1(t) = e^{-\alpha(\beta^2 + \lambda^2)t} \quad (20)$$

A solução da equação (18) é dada por:

$$f(x) = B_1 \sin(\lambda x) + B_2 \cos(\lambda x)$$

A solução da equação (16) é dada, portanto, por:

$$\Gamma(x, t) = (B_1 \sin(\lambda x) + B_2 \cos(\lambda x)) e^{-\alpha(\beta^2 + \lambda^2)t} \quad (21)$$

Com as condições dadas pelas equações (12a) e (12b) obtém-se:

$$\Gamma(0, t) = 0 \Rightarrow B_2 = 0$$

e

$$\Gamma(L, t) = 0 \Rightarrow B_1 \text{sen}(\lambda L) e^{-\alpha(\beta^2 + \lambda^2)t} = 0$$

Da equação acima, verifica-se que $B_1=0$ não satisfaz, pois resulta numa solução nula para Γ . Assim, para que Γ seja não nula é necessário que:

$$\text{sen}(\lambda L) = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{L}$$

Logo, a solução para Γ é dada por:

$$\Gamma_n(x, t) = B_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\alpha(\beta^2 + \lambda_n^2)t} \quad (22)$$

O índice n é utilizado em Γ , B e λ porque eles assumem valores diferentes para cada valor de n .

Sendo o problema linear, sua solução geral será dada por:

$$\Gamma(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\alpha(\beta^2 + \lambda_n^2)t} \quad (23)$$

em que os valores de B_n são determinados com equação (12c), como mostrado abaixo:

$$\Gamma(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \theta_0 - P(x) \Rightarrow$$

$$\theta_0 - \left[A_1 e^{\beta x} + A_2 e^{-\beta x} + \frac{g}{k\beta^2} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \Rightarrow$$

$$\int_0^L \left\{ \theta_0 - \left[A_1 e^{\beta x} + A_2 e^{-\beta x} + \frac{g}{k\beta^2} \right] \right\} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} B_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \Rightarrow$$

$$B_n = \frac{\int_0^L \left\{ \theta_0 - \left[A_1 e^{\beta x} + A_2 e^{-\beta x} + \frac{g}{k\beta^2} \right] \right\} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx}{\int_0^L \text{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx}$$

De onde resulta:

$$B_n = \left\{ \theta_0 \left[\frac{L}{n\pi} - \frac{L}{n\pi} \cos(n\pi) \right] - \left\{ \frac{A_1 L [n\pi - e^{L\beta} n\pi \cos(n\pi) + e^{L\beta} L\beta \sin(n\pi)]}{n^2 \pi^2 + L^2 \beta^2} \right\} + \right. \\ \left. - \left\{ \frac{A_2 e^{-L\beta} L [e^{L\beta} n\pi - n\pi \cos(n\pi) - L\beta \sin(n\pi)]}{n^2 \pi^2 + L^2 \beta^2} \right\} - \frac{g}{k\beta^2} \left\{ \frac{L}{n\pi} - \frac{L}{n\pi} \cos(n\pi) \right\} \right\} / (L/2) \quad (24)$$

Logo a solução de θ durante o aquecimento é dada por:

$$\theta(x, t) = T(x, t) - T_\infty = A_1 e^{\beta x} + A_2 e^{-\beta x} + \frac{g}{k\beta^2} + \sum B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\alpha(\beta^2 + \lambda^2 n^2)t} \quad (25)$$

em que A_1 , A_2 e B_n são dadas pelas equações (15a), (15b) e (24) respectivamente.

O problema do resfriamento, quando a corrente é desligada, é resolvido de maneira idêntica a anterior, bastando fazer $g=0$ e mudando a condição inicial para o valor da temperatura de regime permanente do processo de aquecimento.

3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

As Figuras 3, 4 e 5 mostram os resultados de uma simulação obtidos durante o aquecimento e resfriamento para $T_0=T_1=T_2=T_\infty=25^\circ\text{C}$, $L=240$ mm, $I=1\text{A}$, $k=18$ W/m⁰C, $\rho=6500$ kg/m³, $d=0,5$ mm. Os valores usados para k e ρ são aqueles verificados na literatura para ligas Ti-Ni com memória de forma (Otsuka & Wayman, 1998).

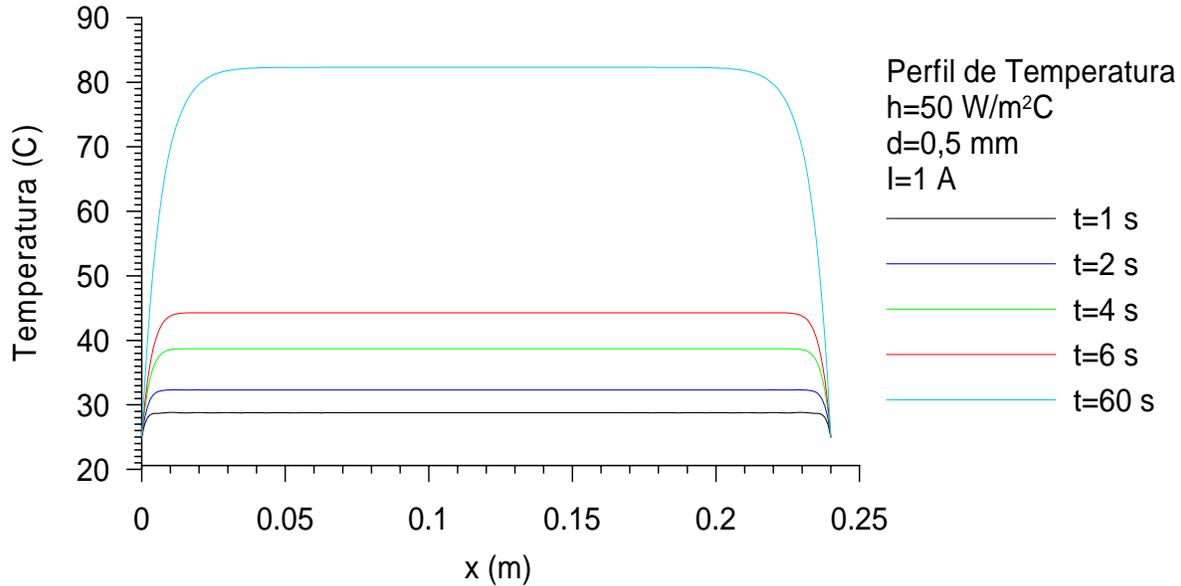


Figura 3. Processo de aquecimento para $h = 50$ W/m².°C.

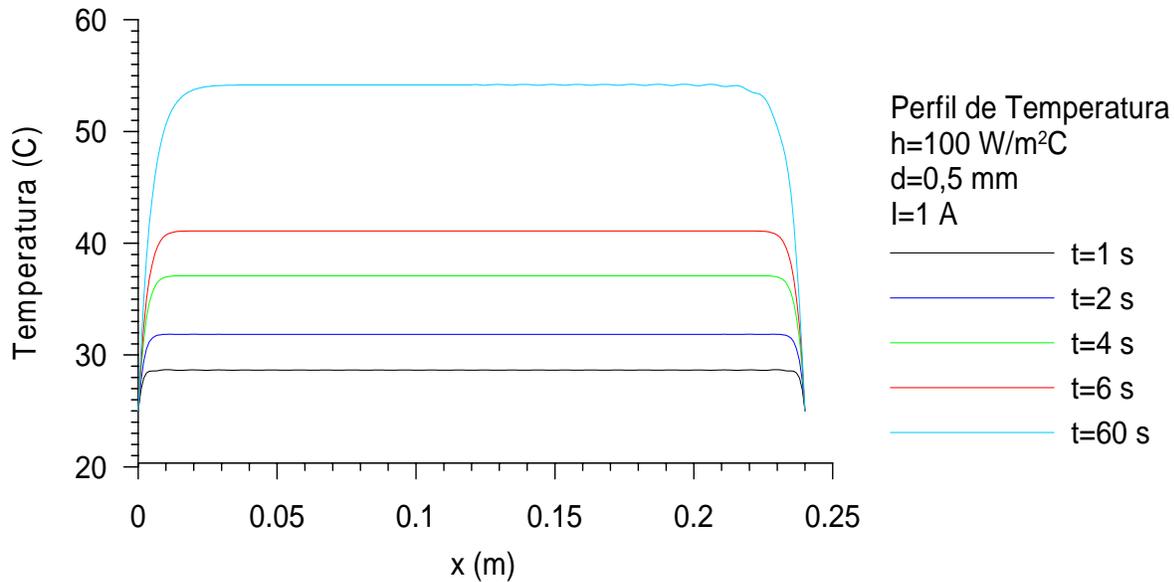


Figura 4. Processo de aquecimento para $h = 100 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$.

As Figuras 3 e 4 mostram a formação dos perfis de temperatura ao longo do comprimento do fio para tempos curtos como $t=1 \text{ s}$ até a obtenção do regime permanente ($t=60 \text{ s}$). Estes resultados são qualitativamente equivalentes àqueles obtidos no estudo realizado por Brailovski *et al* (1996).

Comparando as Figuras 3 e 4 pode-se verificar a influência do coeficiente de transferência de calor (h) sobre as temperaturas do fio para uma corrente constante de 1 A . Constata-se que a duplicação do valor de h leva a uma diminuição das temperaturas do fio. Essa diminuição é da ordem de 35% comparando a Figura 3 com a Figura 4. A Figura 5 mostra o aumento da temperatura de um ponto médio do fio ($x=120 \text{ mm}$) para os dois valores de h testados, permitindo constatar que o regime permanente é atingido para um tempo da ordem de 60s nos dois casos.

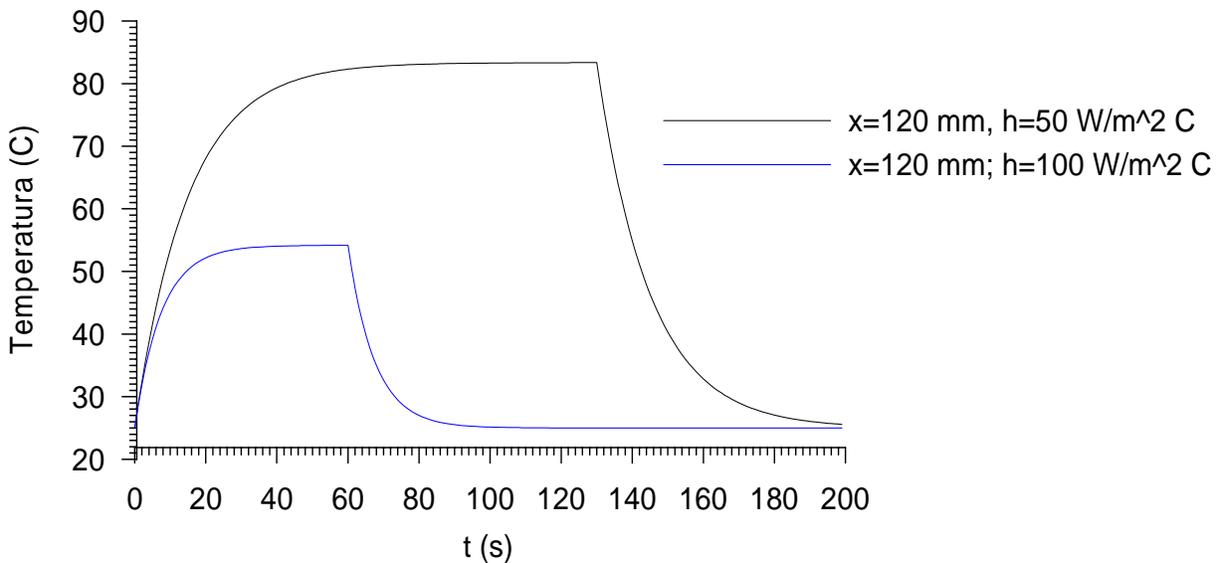


Figura 5. Elevação de temperatura para um ponto central do fio para os dois valores de h .

4. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi realizado um estudo teórico da transferência de calor que ocorre durante a ativação de fios atuadores com memória de forma por intermédio da passagem de corrente elétrica nestes materiais. Para mostrar ao estudante de graduação em Engenharia como desenvolver o modelo físico do problema, utilizou-se a equação da energia juntamente com um conjunto de hipóteses simplificadoras. Ferramentas e conceitos matemáticos ligados à teoria das equações diferenciais parciais foram apresentados com o objetivo de se obter a solução do problema estudado. Esta solução permitiu realizar a simulação do aquecimento elétrico e resfriamento desses fios atuadores, resultando numa ferramenta importante para o projeto de estruturas ativas incorporando esses materiais. As simulações realizadas também permitiram verificar a formação de perfis de temperatura ao longo do comprimento do fio bem como a influência de parâmetros como o coeficiente de transferência de calor entre o fio e o meio ambiente, o diâmetro do fio e a corrente elétrica, levando ao desenvolvimento da capacidade de raciocínio físico do estudante de graduação envolvido sobre o problema focalizado.

Agradecimentos

Os autores agradecem os apoios financeiros recebidos do CNPq/CT-Energ através do processo 400724/2003-0 e da FAPESQ-PB/CNPq através do projeto PPP 035/03.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRAILOVSKI, V.; TROCHU, F.; DAIGNEAULT, G. Temporal Characteristics of Shape Memory Linear Actuators and Their Application to Circuit Breakers. **Materials & Design**. Vol. 17, N° 3, p. 151-158, 1996.

CULSHAW, B. **Smart Structures and Materials**. Artech House, 1996.

MYERS, G. E. **Analytical methods in conduction heat transfer**. McGraw-Hill Book Company, 1971.

OTSUKA, K.; WAYMAN, C.M. **Shape Memory Materials**. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1998.

OZISIK, M. N. **Heat Conduction**. 2nd Edition. John Wiley and Sons, 1993.

SRINIVASAN, A.V.; MCFARLAND, D.M. **Smart Structures – Analysis and Design**. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2001.