COBENGE 2005
XXXIII - Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia
"Promovendo e valorizando a engenharia em um cenário de constantes mudanças"
12 a 15 de setembro - Campina Grande Pb
Promoção/Organização: ABENGE/UFCG-UFPE

PLANEJAMENTO FATORIAL: UMA FERRAMENTA PODEROSA PARA OS PESQUISADORES

Mary R. M. Marinho - maryroberta@terra.com.br
Universidade Federal de Campina Grande, Departamento de Engenharia Mecânica
Av Aprígio Veloso, 882 – Bodocongó – Caixa Postal 10069
58109-970 – Campina Grande – Paraíba
Walman B. de Castro – walman@dem.ufcg.edu.br

Resumo: *A falta de planejamento muitas vezes é a causa do insucesso de uma investigação, e no entanto, raros são os pesquisadores que pensam em estatística antes de realizar seus experimentos. Em uma pesquisa científica o procedimento geral é formular hipóteses e verificá-las diretamente ou por suas conseqüências. Para isto é preciso um conjunto de observações e o planejamento de experimentos é então essencial para indicar o esquema sob o qual as hipóteses possam ser verificadas. As hipóteses são verificadas com a utilização de métodos de análise estatística que dependem da maneira sob a qual as observações foram obtidas. Portanto, planejamento de experimentos e análise dos resultados estão intimamente ligados e devem ser utilizadas em seqüência nas pesquisas científicas das diversas áreas do conhecimento. Este trabalho tem o objetivo de tentar transmitir aos pesquisadores e engenheiros o conhecimento da Técnica de Planejamento Fatorial, bem como a análise dos dados obtidos a partir desse planejamento, inclusive usando um exemplo prático.*

Palavras-chaves: *Estatística, Planejamento experimental, Planejamento fatorial.*

1. INTRODUÇÃO

As pessoas normalmente se lembram da estatística quando se vêem diante de grandes quantidades de informação. Mas, a atividade estatística mais importante não é a análise de dados, e sim o planejamento de experimentos em que esses dados devem ser obtidos. Quando isso não é feito de forma apropriada, o resultado muitas vezes é uma montanha de números estéreis, da qual estatístico algum conseguiria extrair quaisquer conclusões (BARROS NETO et all., 1995).

A essência de um bom planejamento consiste em projetar um experimento de forma que ele seja capaz de fornecer exatamente o tipo de informação que procuramos. Para isso precisamos saber o que é que estamos procurando. Mas isso não é bem assim. Podemos dizer que um bom experimentador é, antes de tudo, uma pessoa que sabe o que quer. Dependendo do que ele queira, algumas técnicas são mais vantajosas que outras, enquanto determinadas técnicas são simplesmente inócuas. No entanto, deve-se ficar claro que esta ferramenta não substitui o conhecimento técnico do especialista da empresa sobre o assunto e nem mesmo trata-se de uma "receita" de como realizar um planejamento. O domínio do problema é de fundamental importância. O conhecimento do especialista sobre o problema conjugado com a técnica (em casos especiais somando-se ainda o auxílio de especialistas em planejamentos de experimentos) é que irá permitir bons planejamentos de experimentos, ou seja, planejamentos mais rápidos (menos pontos), de menor custo e que possibilitem aos seus idealizadores responderem, baseado em inferência estatística, a resposta a seus problemas (BARROS NETO et all., 1995).

Desenvolvendo um pouco mais esta idéia podemos dizer que uma pesquisa científica estatisticamente planejada consiste nas seguintes etapas que dependem de um perfeito entendimento entre o pesquisador e o estatístico (BOX e WILSON, 1951):

1. Enunciado do problema com formulação de hipóteses;
2. Escolha dos fatores (variáveis independentes) que devem ser incluídos no estudo;
3. Escolha da unidade experimental e da unidade de observação;
4. Escolha das variáveis que serão medidas nas unidades de observação;
5. Determinação das regras e procedimentos pelos quais os diferentes tratamentos (combinação de níveis de fatores) são atribuídos às unidades experimentais (ou vice-versa);
6. Análise estatística dos resultados;
7. Relatório final contendo conclusões com medidas de precisão das estimativas, interpretação dos resultados com possível referência a outras pesquisas similares e uma avaliação dos itens de 1 a 6 (desta pesquisa) com sugestões para possíveis alterações em pesquisas futuras.

Usando planejamentos experimentais baseados em princípios estatísticos os pesquisadores podem extrair do sistema em estudo o máximo de informação útil, fazendo um número mínimo de experimentos. Para isso existem várias técnicas disponíveis aos cientistas e engenheiros para melhorar ou otimizar sistemas, processos e produtos. Essas técnicas são ferramentas poderosas, com as quais vários objetivos específicos podem ser alcançados (BOX et. all, 1978). Esse trabalho tem o objetivo de tentar transmitir aos pesquisadores e engenheiros o conhecimento da Técnica de Planejamento Fatorial, bem como a análise dos dados obtidos a partir desse planejamento, inclusive usando um exemplo prático.

2. TÉCNICA DE PLANEJAMENTO EXPERIMENTAL FATORIAL

Para executar um planejamento fatorial precisamos em primeiro lugar especificar os níveis em que cada fator será estudado, isto é, os valores dos fatores (ou as versões, nos casos qualitativos) que serão empregados nos experimentos. Cada um desses experimentos, em que o sistema é submetido a um conjunto de níveis definido, é um ensaio experimental. Em geral, se houver n_1 níveis do fator 1, n_2 do fator 2, ..., e n_k do fator k, o planejamento será um fatorial $n_1 \times n_2 \times ... \times n_k$. Isto não significa obrigatoriamente que serão realizados apenas $n_1 \times n_2 \times ... \times n_k$ experimentos. Este é o número mínimo, para se ter um planejamento fatorial completo. O experimentador pode querer repetir ensaios, para ter uma estimativa do erro experimental, e nesse caso o número de experimentos será maior (DEMING, 1981).

Para estudar o efeito do fator sobre a resposta é preciso fazê-lo variar e observar o resultado dessa variação. Isso obviamente implica na realização de ensaios em pelo menos dois níveis desse fator. Um planejamento em que todas as variáveis são estudadas em apenas dois níveis é, portanto, o mais simples de todos eles. Havendo k fatores, isto é, k variáveis controladas pelo experimentador, o planejamento de dois níveis irá requerer a realização de $2 \times 2 \times ... \times 2 = 2^k$ ensaios diferentes, sendo chamado por isso de planejamento fatorial 2^k (BOX et. all, 1978).

A seguir daremos um exemplo de um planejamento fatorial 2^3. Com esse exemplo apresentaremos uma série de conceitos fundamentais que depois poderão ser aplicados a planejamentos envolvendo um número qualquer de fatores.

2.1- Planejamento fatorial 2^3

Para esse planejamento queremos saber qual o rendimento final de uma reação química variando a temperatura, e/ou usando um catalisador diferente e/ou variando a concentração de um reagente. Na linguagem estatística, dizemos que estamos interessados em descobrir como a resposta (o rendimento da reação) dependerá de três fatores mencionados: da temperatura, do tipo de catalisador e concentração de um reagente. Com isso o planejamento fatorial completo passará a necessitar da realização de $2^3 = 8$ ensaios. Escolhemos os níveis 40ºC e 60ºC para a temperatura, admitiremos que existem dois tipos de catalisadores, A e B e vamos variar a concentração do reagente de 1,0 M e 1,5 M. A listagem dessas combinações, que é chamada de matriz de planejamento, é apresentada na Tabela 2.1, juntamente com os rendimentos obtidos nos experimentos em duplicata. A matriz de planejamento lista os ensaios na ordem padrão. Todas as colunas começam com o nível inferior (-) e depois os sinais vão se alternando. Um a um na primeira coluna, - + - +..., depois dois a dois, - - + +..., e finalmente quatro sinais negativos e quatro positivos na última coluna. Se houvesse uma quarta coluna, a coluna correspondente a ele consistiria em oito sinais menos e seguida oito sinais mais. Com um total de k fatores a última coluna 2^{k-1} sinais negativos e depois 2^{k-1} sinais positivos (MONTGOMERY, 1997). Lembrando disso, podemos escrever facilmente a matriz de planejamento de qualquer fatorial de dois níveis na sua ordem padrão.

A partir da matriz de planejamento podemos formar a tabela de coeficientes de contraste, multiplicando um a um os sinais das colunas apropriadas para obter as novas colunas correspondendo às interações. Teremos então os três efeitos principais 1 (temperatura), 2 (catalisador) e 3 (concentração), três interações de dois fatores, 12, 13 e 23 e uma interação de três fatores, 123. Os sinais correspondentes a esses efeitos de interação na tabela de coeficientes de contraste são obtidos multiplicando-se as colunas correspondestes de cada interação.

Tabela 2.1- Resultado de um planejamento fatorial 2^3.

		Limite Inferior (-)	Limite Superior (+)
Fatores:	1: Temperatura (ºC)	40	60
	2: Catalisador (tipo)	A	B
	3: Concentração (M)	1,0	1,5

Ensaio	1	2	3	Rendimentos		Média
1	-	-	-	56	52	54.0
2	+	-	-	85	88	86,5
3	-	+	-	49	47	48,0

4	+	+	-	64	62	63,0
5	-	-	+	65	61	63,0
6	+	-	+	92	95	93,5
7	-	+	+	57	60	58,5
8	+	+	+	70	74	72,0

Acrescentando a coluna de sinais positivos, necessária para o cálculo da média, teremos $2^3 = 8$ colunas ao todo, como se vê na Tabela 2.2.

Tabela 2.2- Coeficientes de contraste para um fatorial 2^3. A última coluna contém os valores médios dos rendimentos obtidos nos ensaios.

MÉDIA	**1**	**2**	**3**	**12**	**13**	**23**	**123**	$\bar{y}$
+	-	-	-	+	+	+	-	54,0
+	+	-	-	-	-	+	+	86,5
+	-	+	-	-	+	-	+	48,0
+	+	+	-	+	-	-	-	63,0
+	-	-	+	+	-	-	+	63,0
+	+	-	+	-	+	-	-	93,5
+	-	+	+	-	-	+	-	58,5
+	+	+	+	+	+	+	+	72,0

Cálculo dos efeitos

A tabela 2.2 contém todos os sinais necessários para os cálculos dos efeitos. O divisor para a média é 8 e 4 para cada um dos efeitos. Empregando os sinais apropriados como coeficientes dos rendimentos médios observados (que são reproduzidos na última coluna da Tabela 2.2, para facilitar) e em seguida aplicando os divisores calculamos os sete efeitos e a média global. Em cada cálculo são utilizadas todas as observações.

Todas as colunas da Tabela 2.2, exceto a primeira, têm quatro sinais positivos e quatro sinais negativos. Qualquer efeito, portanto, pode ser interpretado como a diferença entre duas médias, cada uma das quais contendo metade das observações.

O efeito principal da temperatura vai ser dado por:

$$(-54{,}0 + 86{,}5 - 48{,}0 + 63{,}0 – 63{,}0 + 93{,}5 – 58{,}5 + 72{,}0)/4 = 22{,}88$$

O efeito principal do catalisador será dado por:

$$(-54,0 - 86,5 + 48,0 + 63,0 – 63,0 - 93,5 + 58,5 + 72,0)/4 = - 13,88$$

O efeito principal da concentração será:

$$(-54,0 - 86,5 - 48,0 - 63,0 + 63,0 + 93,5 + 58,5 + 72,0)/4 = 8,88$$

O efeito de interação entre a temperatura com o catalisador será:

$$(+54,0 - 86,5 - 48,0 + 63,0 + 63,0 - 93,5 – 58,5 + 72,0)/4 = - 8,63$$

O efeito de interação entre a temperatura com a concentração será:

$$(+54,0 - 86,5 + 48,0 - 63,0 - 63,0 + 93,5 – 58,5 + 72,0)/4 = - 0,88$$

O efeito da interação entre o catalisador e a concentração será:

$$(+54,0 + 86,5 - 48,0 - 63,0 - 63,0 - 93,5 + 58,5 + 72,0)/4 = 0,88$$

O efeito da interação entre a temperatura, o catalisador e a concentração será:

$$(-54,0 + 86,5 + 48,0 - 63,0 + 63,0 - 93,5 - 58,5 + 72,0)/4 = 0,13$$

Estimativa de erro

Como as observações individuais foram feitas em duplicatas, a estimativa combinada da variância de uma observação individual é dada por:

$$\sigma_i^2 = d_i^2/2 \qquad (1)$$

A variância total do planejamento fatorial em questão é dada pela soma das variâncias de cada experimento (σ_t^2) dividido pelo número de corridas:

$$\sigma^2 = \sigma_t^2/8 \qquad (2)$$

Os valores desses cálculos estão na Tabela 2.3.

Tabela 2.3- Valores calculados da variância média e da variância total.

Ensaios	**Rendimento (%) 1**	**Rendimento (%) 2**	**d_i**	**$_i^2 = d_i^2/2$**
1	56	52	4	8
2	85	88	- 3	4,5
3	49	47	- 2	2
4	64	62	- 2	2
5	65	61	- 4	8

6	92	95	3	4,5
7	57	60	3	4,5
8	70	74	4	8
				$\square^2 = \sum \square_i^2/8 = 5,19$

O cálculo da variância dos efeitos é dado por:

$$VAR\ (efeito) = (4/N)\square^2$$

onde N é o número total de experimentos, N = 16, levando em consideração os ensaios duplicados. Daí:

$$VAR\ (efeito) = (4/16)\ .\ 5,19 = 1,3$$

O cálculo do erro experimental padrão é dado por:

$$ERRO = \sqrt{VAR(efeito)} = \sqrt{1,3} = 1,1$$

O erro padrão do rendimento médio global será a metade do valor calculado, 0,55, porque os coeficientes da combinação linear nesse caso são todos iguais a 1/8, ao invés de ±1/4. A Tabela 2.4 mostra os valores calculados para todos os efeitos e seus erros padrão.

Interpretação dos resultados

Para decidir se os efeitos calculados são significativamente diferentes de zero podemos empregar um teste t usando as tabelas estatísticas existentes (BUSSAB e MORETIN, 1985). No nível de 95% de confiança o valor de t correspondente a 8 graus de liberdade é 2,306. Em nosso exemplo isso quer dizer que só consideraremos estatisticamente significativo um efeito cujo valor absoluto exceder (0 + 2,306 x 1,1) = 2,37. Então, fazendo uma análise de significância estatística dos dados da Tabela 2.4 verifica-se que todos os efeitos principais são significativos e o efeito de interação entre a temperatura e o catalisador também é significativa. Não há evidências de interação da concentração com os outros dois fatores. A existência de um efeito de interação significativo indica que os efeitos principais devem ser interpretados conjuntamente. A melhor forma de fazer isso é traçar um diagrama contendo as respostas médias de níveis das variáveis da interação, como mostra a Figura 2.1.

Tabela 2.4- Resumo dos resultados dos efeitos principais e de interação.

EFEITO	**ESTIMADOR**	**ERRO**
Média:	67,3 □□□	

Efeitos Principais:	
1	22,9 ± 1,1 (*)
2	- 13,9 ± 1,1 (*)
3	8,9 ± 1,1 (*)
Efeitos de Interação de dois fatores:	
12	- 8,6 ± 1,1 (*)
13	- 0,9 ± 1,1
23	0,9 ± 1,1
Efeitos de Interação de três fatores:	
123	0,1 ± 1,1

Examinando esse diagrama podemos concluir:

1. A elevação da temperatura aumenta o rendimento da reação, mas esse efeito é muito mais pronunciado com o catalisador A do que com o catalisador B (+31,5 contra +14,25);
2. A troca do catalisador A pelo catalisador B diminui o rendimento da reação, e esse efeito é muito mais pronunciado a 60^{o}C do que a 40^{o}C (-22,5 contra -5,25);
3. Os maiores rendimentos (90%, em média) são obtidos empregando-se o catalisador A e mantendo-se a temperatura em 60^{o}C.

O efeito principal da concentração pode ser interpretado isoladamente, porque não há interação desse fator com os demais. A interpretação é simples: quando a concentração do reagente em questão é aumentada de 1,0 M para 1,5 M há um aumento médio de cerca de 9% no rendimento, e não há evidência de que esse aumento dependa dos níveis das outras variáveis, na faixa experimental investigada.

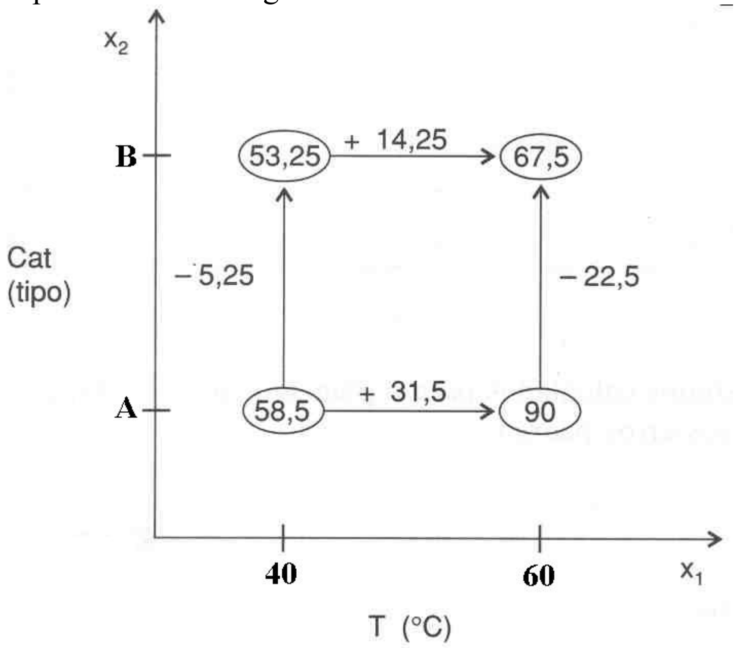

Figura 2.1- Diagrama para interpretação dos resultados.

Para esse caso temos um modelo linear, onde utilizamos níveis mínimos e máximos para observar nossos resultados. Quando se quer utilizar valores intermediários entre esse mínimo e esse máximo é necessário fazer um ajuste desse modelo utilizando a metodologia de superfícies de resposta. Essa metodologia tem o objetivo de atingir uma região ótima (máxima ou mínima) da superfície investigada.

Quando temos um número muito grande de variáveis para ser investigado aumenta-se consideravelmente o número de ensaios tornando o planejamento fatorial completo inviável. Para isso a solução é trabalhar com planejamento fatorial fracionários, que consiste você avaliar os resultados fazendo um número menor de ensaios. Isso é possível por dois motivos. O primeiro, o número de efeitos de interação com o número de fatores e muitas vezes esses efeitos têm valores pequenos e são destituídos de qualquer importância prática. Em segundo lugar, quando o número de variáveis aumenta, crescem as chances de uma ou mais variáveis não afetem significativamente a resposta, seja por meio de efeitos principais, seja por meio de efeitos de interação. Mais uma vez, se os efeitos dessas variáveis não precisam ser determinados, não é necessário fazer todos os ensaios do fatorial completo (BOX, G. e DRAPER, 1978).

3- CONCLUSÕES

Após as análises feitas nesse trabalho chegamos a conclusão que o planejamento fatorial é importante por várias razões, incluindo:

1- Apesar de usarem um número pequeno de experimentos por fator, esses planejamentos podem indicar tendências e direções da pesquisa;
2- Quando uma maior exploração local é necessária, é possível aumentar esses experimentos utilizando a metodologia de superfícies de resposta. Essa metodologia tem o objetivo de atingir uma região ótima (máxima ou mínima) da superfície investigada;
3- Eles são a base para os planejamentos fatoriais fracionários de dois níveis. Planejamentos Fatoriais Fracionários são de grande valor no estágio inicial da pesquisa;
4- As interpretações dos resultados são dados diretamente por aritmética elementar.

4- AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a CAPES pelo apoio financeiro através do projeto PROCAD nº 0104/01-9.

5- REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARROS NETO, B.; SCARMINIO, I. S.; BRUNS, R. E., **Planejamento e otimização de experimentos.** Campinas: Editora da UNICAMP, 1995.
BOX, G. E. P.; HUNTER, W. G.; HUNTER, J. S., **Statístics for Experiments**, J. Wiley & Sons, 1978.
BOX, G. E. P.; DRAPER, N. R., **Empirical Model-Building and Response Surfaces**, John Wiley & Sons, New York, 1987.
BOX, G. E. P; WILSON, K. B., **On the experimental attainment of optimum condition.** J. Roy. Statist. Soc. Vol. B13, p. 1-38, 1951.
BUSSAB, W. O.; MORETIN, P. A. **Estatística básica.** São Paulo; Atual, 1985.
DEMING, S. N. **Experimental designs: response surface in chemometrics, mathematics and statistics in chemistry.** Kowalski, B. R. (ed.) Dordrecht; Reidel, 1981.

MONTGOMERY, D. C., **Design and Analysis of Experiments,** 4th edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1997.

FACTORIAL DESIGN: A POWERFUL TOOL FOR THE RESEARCHERS

Abstract: *Engineers and scientists play a critical role in these activities, and the efficiency and effectiveness with which the development process is performed are often a key factor in organizational success. Statistically designed experiments are an important component of product and process design and development. The last 20 years have seen many new developments in experimental design, accompanied by significant applications growth in engineering. Typical experimental design application areas include process and product characterization, achieving variability reduction, control and stability, process optimization, and designing processes and products to achieve robustness. In industrial applications the so called factorial designs are often the best and most used designs. This work has the objective of trying to transmit to the researchers and engineers the knowledge of the technique of factorial design, as well as the analysis of the data obtained to leave of that design, besides using a practical example.*

Key-words*: Statistic, Experimental design, Factorial design.*