COBENGE 2005
XXXIII - Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia
"Promovendo e valorizando a engenharia em um cenário de constantes mudanças"
12 a 15 de setembro - Campina Grande Pb
Promoção/Organização: ABENGE/UFCG-UFPE

ANÁLISE SOBRE O USO DO CONHECIMENTO INTEGRADO NO ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Viviana Cocco Mariani - viviana.mariani@pucpr.br
Pontifícia Universidade Católica do Paraná
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
Rua Imaculada Conceição, 1155, Prado Velho, CEP: 81611-970 - Curitiba, PR.

Luís Mauro Moura – luis.moura@pucpr.br

Resumo. *A disciplina Matemática Avançada lecionada no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PPGEM) na Pontifícia Universidade Católica do Paraná (PUCPR), consiste de um extenso conteúdo programático onde um dos tópicos é o ensino de Equações Diferenciais. Com o objetivo de dinamizar as aulas e motivar os alunos o professor fornece as ferramentas básicas para a solução analítica das equações diferenciais parciais (quando possível) e os alunos são instigados a buscar e propor outras ferramentas analíticas ou numéricas para resolver as equações diferenciais comparando-as, interpretando e fazendo novas conjecturas sobre os resultados obtidos. Este artigo apresenta as reflexões dos autores sobre a necessidade de integrar as disciplinas, levando em conta a formação de um aluno engenheiro inserido no contexto sócio-econômico e político atual.*

Palavras-chave. *equações diferenciais parciais, métodos analíticos, métodos numéricos, educação matemática, condução de calor*

1. INTRODUÇÃO

No meio acadêmico é usual discutir sobre as emergências atuais da formação do engenheiro situando-o no contexto sócio-econômico e político. O mercado de trabalho exige engenheiros aptos para trabalhar com novas tecnologias e criativos para desenvolver novos produtos. Entre as várias competências e habilidades citadas em diferentes trabalhos encontra-se de forma repetida, a visão de que esses engenheiros devem ter:

(i) Conhecimento científico e técnico para acompanhar a evolução tecnológica;
(ii) Conhecimento humanístico para assumir desafios sociais;
(iii) Conhecimentos administrativos gerais que possibilitem atuação empreendedora e gerencial;
(iv) Conhecimentos básicos para alicerçar a sua formação continuada.

Assim, deve-se refletir sobre os pressupostos teórico-metodológicos que devem ser adotados em sala de aula para alicerçar propostas inovadoras de formação, para que o aluno engenheiro esteja apto a enfrentar o mercado de trabalho que está em constante transformação.

Os diretores e coordenadores dos cursos de Graduação e Pós-Graduação em Engenharia estão diante de desafios para compatibilizar as exigências de formação de um novo profissional. Exigências do mercado de trabalho, que deseja receber profissionais com uma sólida base de conteúdos e com experiências de situações práticas. Assim, os professores devem aliar a teoria e a prática, o que requer um repensar de todo o processo ensino-aprendizagem. Tradicionalmente os cursos de Engenharia são formados por disciplinas básicas e específicas que em geral não requerem um comprometimento com a prática (Flemming, 2002).

Através de um olhar didático parece natural que o professor busque alternativas para melhor compreensão e motivação do conteúdo matemático onde o próprio aluno possa formular problemas e elaborar modelos matemáticos a partir de situações reais, selecionar as variáveis, equacionar e entender os conceitos envolvidos, familiarizando-se com os mesmos, resolver e obter soluções analíticas (quando possível) e numéricas comparando-as; interpretar os resultados bem como fazer simulações e conjecturas. Este é um dos principais desafios na era da informação.

Assim, é necessário que o professor estimule o aluno a construir o seu conhecimento de forma autônoma, a partir de suas descobertas, As experiências vivenciadas pela autora deste artigo ao ministrar um dos tópicos da disciplina Matemática Avançada são apresentadas no decorrer deste trabalho. A disciplina Matemática Avançada faz parte do núcleo de disciplinas fundamentais do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e todos os alunos devem cursá-la. Assim, a constante busca de motivação para o processo de ensino-aprendizagem nos faz refletir e questionar sobre as ferramentas didáticas mais adequadas.

2. CONCEPÇÕES PEDAGÓGICAS

Como na Matemática a validade das idéias é demonstrada através de raciocínios rigorosos, há quem coloque em dúvida a possibilidade de inovar o ensino das disciplinas que envolvem Matemática. As reflexões quanto às possibilidades de mudança pedagógica com referência à Matemática indicam a necessidade de repensar alguns pontos, por exemplo: a relação do aluno com a disciplina, a sua participação em sala de aula considerando-se os aspectos afetivos e cognitivos, como também o enfoque dado à Matemática para que ela se torne objeto de conhecimento e saber – pessoal e interpessoal dos alunos. O ambiente que se propõe a este tipo de ação pedagógica deve ser um ambiente positivo que encoraje os alunos a propor soluções, explorar possibilidades, levantar hipóteses validando suas próprias conclusões.

O conhecimento matemático deve ser o resultado da construção humana em sua interação constante com o contexto natural, social e cultural. Assim, a Matemática não será uma ciência imutável e se transformará em uma disciplina em que novos conhecimentos são produzidos para resolver problemas científicos e tecnológicos, gerando saber para construir a cidadania (Cercal *et al*., 2003).

Como afirma D'Ambrósio (1996) até as respostas "incorretas" devem constituir a riqueza do processo de aprendizagem e devem ser exploradas e utilizadas de maneira a gerar novo conhecimento, novas questões, novas investigações ou um refinamento das idéias existentes, o que se deve exercitar constantemente.

3. APLICAÇÃO PRÁTICA

Para propiciar uma aprendizagem eficiente na disciplina Matemática Avançada, o ensino se dá através da elaboração de trabalhos pelos alunos. A aula sempre começa com uma exposição do professor, onde são apresentados os conceitos necessários de equações diferenciais para o estudo e solução de alguns problemas. Existe um caráter explicativo já que as informações são passadas pelo professor, porém este promove o questionamento por parte do estudante.

Nessa ocasião o aluno deve ser consultado sobre seus interesses, para que os problemas que serão propostos na etapa seguinte sejam significativos e gerem maior motivação para os alunos. A próxima etapa do processo é quando o professor solicita que cada aluno pesquise e proponha um problema físico cuja modelagem matemática resulte em uma ou um sistema de equações diferencias, que serão resolvidas através de métodos analíticos (se possível) e métodos numéricos.

Após a exposição do professor, os alunos passam para a etapa de buscas de informações, isto é, de pesquisa extra-classe O professor agora é apenas um mediador do processo podendo até mesmo disponibilizar os materiais necessários ao estudo e estimulando outras buscas. O aluno pode trabalhar de maneira individual e/ou em pequenos grupos. A interação aluno-aluno e aluno-professor tem um caráter extremamente relevante no processo de ensino-aprendizagem. O aluno pode interagir com os outros através da colaboração mútua, e o professor pode oferecer níveis de ajuda compatíveis com as necessidades de cada aluno.

É neste momento que se enfatiza a importância da utilização de problemas relacionados à prática profissional. Na última etapa do processo os alunos apresentam seus trabalhos para os demais colegas promovendo assim discussões temáticas, trocando idéias sobre os conhecimentos obtidos.

De acordo com a Teoria de Vygotsky (1999), o aluno inicialmente reflete sobre os problemas apresentados, trata as informações que possui, e soluciona-os de acordo com os problemas resolvidos anteriormente e com os conhecimentos que já possui. Posteriormente o aluno deve ser capaz de resolver novos problemas cujas soluções não podem ser obtidas com os conhecimentos que já possui e, então, deve buscar novos procedimentos, tendo soluções criativas.

Observa-se que o professor atua como um mediador no processo educativo e, de acordo com as tarefas por ele propostas, tem-se um modelo de aprendizagem produtiva. O professor orienta o processo educativo e formativo, cabendo-lhe propor situações-problema que visem a atender às necessidades sociais, que estejam coerentes com o contexto histórico e cultural vivenciado pelo aluno engenheiro e que estejam relacionadas à prática profissional. Com isso, os motivos, sentimentos e valores estão sendo formados. Assim, esta metodologia enfatiza os aspectos instrutivos e educativos, visando à formação integral do homem (Viana e Menezes, 2001).

O exemplo a seguir apresentado mostra como a interdisciplinaridade está presente nas aulas de Matemática Avançada e como o conhecimento já adquirido pelo aluno pode ser útil na solução dos problemas apresentados.

3.1. EQUAÇÃO DIFERENCIAL PARCIAL

Na disciplina Condução de Calor ministrada no segundo semestre do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, os alunos estudam a equação diferencial parcial de condução de calor ou de difusão de calor (Lei de Fourier)

$$\frac{\rho}{c_p}\frac{\partial T}{\partial t} = \dot{q} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right), \tag{1}$$

em sua forma completa e simplificada, onde t é a variável tempo, ρ é a densidade do fluido, k é a condutividade térmica, c_p é o calor específico do fluido e T(x, y, z) representa em coordenadas cartesianas, o campo de temperatura, que é um escalar (Incropera e DeWitt, 1998).

A equação diferencial (1) é também utilizada na disciplina Matemática Avançada, e neste artigo uma simplificação da mesma será considerada. Para condições bidimensionais, em regime estacionário, sem geração interna de calor e com condutividade térmica constante, a partir da equação (1) a forma da equação do calor é a seguinte,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0\ . \tag{2}$$

Na análise de um problema de condução de calor existem dois objetivos principais a serem atingidos. O primeiro é determinar a distribuição de temperatura no meio, isto é, obter T(x, y) o segundo, é determinar as componentes do fluxo térmico $q_n'' = -k\frac{\partial T}{\partial n}$ através das equações para as taxas de transferência de calor.

Os métodos para resolver a equação (2) incluem o uso de procedimentos analíticos, gráficos e numéricos (diferenças finitas, elementos finitos, elementos de contorno ou volumes finitos).

O procedimento analítico envolve a elaboração de uma solução matemática exata para a equação (2). Esta equação diferencial é parcial e embora várias técnicas estejam disponíveis para a solução de tais equações, estas soluções envolvem, com freqüência, séries e funções matemáticas complicadas e podem ser obtidas para um conjunto restrito de geometrias e condições de contorno mais simples.

Entretanto, tais soluções possuem um valor considerável, uma vez que a variável dependente T é determinada na forma de uma função contínua das variáveis independentes (x, y). Assim, a solução pode ser usada no cálculo da temperatura em qualquer ponto de interesse no meio. As técnicas analíticas são extremamente importantes e para ilustrar este fato a solução exata será obtida neste trabalho através do método de separação de variáveis.

3.2. MÉTODO DE SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS

O método de separação de variáveis será utilizado para resolver a equação (2) considerando o sistema da figura (1), onde três lados da placa retangular permanecem a uma temperatura constante T_1, enquanto o quarto lado é mantido a uma temperatura $T_2 \neq T_1$. Introduzindo a seguinte mudança de variável,

$$\theta = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} \tag{3}$$

Substituindo a equação (3) na equação (2) tem-se,

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}=0, \qquad (4)$$

Uma vez que a equação diferencial é de segunda ordem em x e y, duas condições de contorno são necessárias para cada uma das coordenadas. São elas

$\theta(0, y) = 0$ e $\theta(x, 0) = 0$
$\theta(L, y) = 0$ e $\theta(x, W) = 1$

Três das quatro condições de contorno são homogêneas, devido a mudança de variáveis descrita pela equação (3), e o valor de θ ficou restrito ao intervalo de 0 e 1.

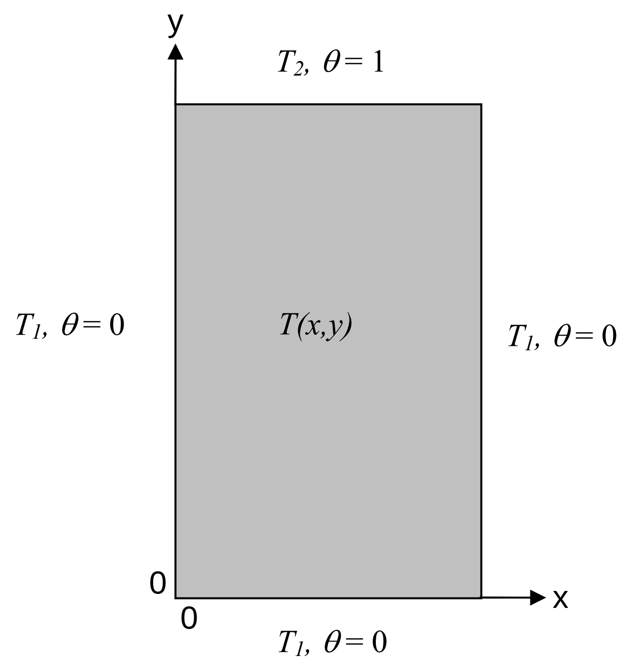

Figura 1 – Condução de Calor bidimensional em uma placa retangular.

A utilização da técnica de separação de variáveis implica na suposição de que a solução pretendida para a equação diferencial pode ser expressa como o produto de duas funções X e Y, uma dependente somente de x e a outra de y, ou seja, considera-se a existência de uma solução que tem a forma

$$\theta(x,y) = X(x)Y(y), \qquad (5)$$

Substituindo na equação (4) e dividindo por XY, obtém-se,

$$-\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}, \qquad (6)$$

ficando evidente que a equação (6) é separável, isto é, o lado esquerdo da equação depende apenas de x, enquanto o lado direito depende somente de y. Desta forma, a igualdade na equação (6) se aplica somente se ambos os termos forem iguais a um mesmo valor constante. Identificando esta constante de separação por λ^2, tem-se

$$\frac{d^2X}{dx^2}+\lambda^2X=0 \qquad (7)$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2}-\lambda^2Y=0 \qquad (8)$$

A equação diferencial parcial original fica reduzida a duas equações diferenciais ordinárias. Note que a definição de λ^2 como uma constante positiva não é arbitrária. Pode-se mostrar que com a escolha de um valor negativo ou nulo seria impossível obter uma solução capaz de satisfazer as condições de contorno especificadas.

As soluções gerais para as equações (7) e (8) são, respectivamente,

$$X=C_1\cos(\lambda x)+C_2 sen(\lambda x), \qquad (9)$$

$$Y=C_3e^{-\lambda y}+C_4e^{\lambda y} \qquad (10)$$

Utilizando as condições de contorno, encontramos a solução final,

$$\theta(x,y)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}+1}{n}sen\frac{n\pi x}{L}\frac{senh(n\pi y/L)}{senh(n\pi W/L)}, \qquad (11)$$

A equação (11) é uma série convergente no qual o valor de θ pode ser calculado para quaisquer x e y. A temperatura T que corresponde a um dado valor de θ pode ser obtida através da equação (3), resultando em,

$$T(x,y)=T_1+\frac{2(T_2-T_1)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}+1}{n}sen\frac{n\pi x}{L}\frac{senh(n\pi y/L)}{senh(n\pi W/L)} \qquad (12)$$

3.3. MÉTODOS NUMÉRICOS

Ao contrário dos métodos analíticos, que fornecem resultados exatos para qualquer ponto do meio, os métodos gráficos e métodos numéricos geram resultados aproximados para alguns pontos discretos. Contudo, uma vez que estes métodos se adaptam a geometrias e condições de contorno complexas, com freqüência eles representam os únicos meios pelos quais problemas multidimensionais de condução de calor podem ser resolvidos.

Numericamente a equação (2) será resolvida neste trabalho através dos métodos de diferenças finitas e volumes finitos. Uma equação em diferenças finitas adequada aos nós interiores de uma sistema bidimensional pode ser deduzida a partir da figura (2),.

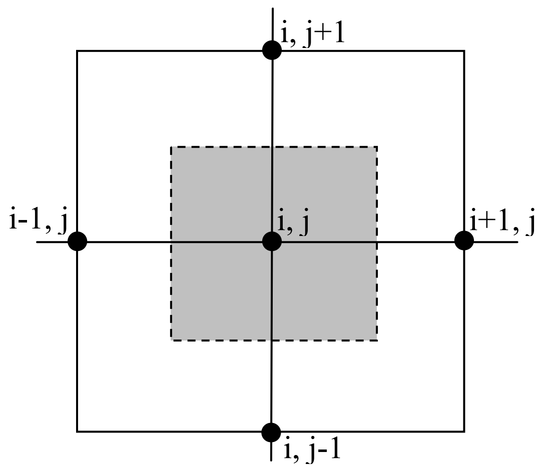

Figura 2 – Rede nodal em diferenças finitas.

O valor da derivada no ponto nodal (i, j) da figura (2) pode ser aproximada por (Maliska, 1995),

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{\left.\partial T/\partial x\right)_{i+1/2,j} - \left.\partial T/\partial x\right)_{i-1/2,j}}{\Delta x}. \tag{13}$$

Os gradientes de temperatura podem, por sua vez, serem expressos como uma função das temperaturas nodais, isto é,

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{i+1/2,j} = \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta x}, \tag{14}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{i-1/2,j} = \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x}. \tag{15}$$

Substituindo as equações (14) e (15) na equação (13) e procedendo de forma análoga com a derivada de segunda ordem na direção de y obtemos a partir da equação (2), com Δx = Δy, a equação algébrica para cada ponto nodal (i, j),

$$T_{i,j+1} + T_{i,j-1} + T_{i+1,j} + T_{i-1,j} - 4T_{i,j} = 0, \tag{16}$$

$$T_{i,j} = (T_{i,j+1} + T_{i,j-1} + T_{i+1,j} + T_{i-1,j})/4. \tag{17}$$

Assim, a solução pelo método das diferenças finitas para a equação diferencial do calor reduz-se a uma equação algébrica aproximada. O método dos volumes finitos obtém a mesma solução apresentada na equação (17).

Nota-se nesta equação que o valor de T(x,y) é obtido pontualmente em cada nó (i, j), isto é, T(x, y) é obtida de forma discreta. Desta forma, quanto mais refinada a malha numérica, a solução numérica ficará mais próxima da solução analítica apresentada na equação (12).

Uma vez estabelecida uma malha de pontos nodais e obtida uma equação em diferenças finitas apropriada para cada nó, a distribuição de temperatura pode ser determinada. O problema se reduz à solução de um sistema de equações algébricas lineares. Numerosos métodos estão disponíveis para este propósito, e são classificados em diretos ou iterativos.

Os métodos diretos envolvem um número fixo, pré-determinado, de operações aritméticas e o seu uso é adequado quando o número de equações (número de temperaturas nodais desconhecidas) é pequeno. Estes métodos exigem uma grande disponibilidade de memória do computador, bem como longos tempos de processamento. Desse modo, com freqüência, se torna mais eficiente utilizar técnicas iterativas, caracterizadas por uma reduzida exigência de tempo computacional e especialmente apropriadas quando o número de equações é grande.

Um outro problema estudado na primeira semana da disciplina de condução é o problema transitório de um fio dissipando uma potência elétrica simples (Incropera e DeWitt, 1998). Embora a equação diferencial obtida seja simples ela serve para ilustrar problemas em que a solução analítica é inexistente e métodos numéricos devam ser empregados. A equação diferencial que deve ser resolvida é:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{i^2 R_e' - \pi D h\left(T - T_\infty\right) - \pi D \varepsilon \sigma\left(T^4 - T_{viz}^4\right)}{\rho c\left(\pi D^2/4\right)} \tag{18}$$

Obtendo-se, a partir da equação (18), uma solução para a variação da temperatura, T, com o tempo, t, em termos da corrente elétrica dissipada, *i*, da resistência elétrica por unidade de comprimento, R_e', do diâmetro do fio, D, do coeficiente de convecção, h, da densidade, ρ, e do calor especifico, c, do material que é feito o fio, da emissividade, ε, da superfície do fio e da temperatura do ar ao redor, T_∞, e da temperatura da vizinhança, T_{viz}.

Este problema é ilustrativo da facilidade de obtenção de soluções numéricas, através de uma discretização simples. A equação (18), discretizada fica na forma:

$$T_{i+1} - T_i = \Delta t \frac{i^2 R_e' - \pi D h\left(\overline{T} - T_\infty\right) - \pi D \varepsilon \sigma\left(\overline{T}^4 - T_{viz}^4\right)}{\rho c\left(\pi D^2/4\right)} \tag{19}$$

onde $\overline{T}$ pode ser avaliado no tempo *i*, *i+1,* ou numa ponderação entre eles. A solução deste problema é recursiva onde parte-se de uma temperatura inicial T_0 e calcula-se T_1, prossegue-se em seguida calculando T_2, T_3,...., até um número de iterações predefinidas ou quando um critério para a obtenção do regime permanente for atingido. Na figura (3) apresenta-se um exemplo de solução para diferentes valores de passo de tempo, calculando $\overline{T}$ no instante *i.* As propriedades utilizadas são listadas na tabela (1). Observa-se que para os passos de tempo de 0,01 e 0,1 s os resultados são concordantes. Aumentando o passo de tempo para 1 s já se observa uma diferença visual, sendo mais expressiva para um passo de tempo de 5 s. Para um passo de tempo de 10 s o aquecimento provocado na primeira iteração faz que a temperatura calculada para o fio ultrapasse a temperatura final de equilíbrio térmico, 304,849 K, provocando uma grande oscilação no transiente, embora convirja para a solução do regime permanente. Desta forma, o aluno além de praticar a solução numérica da solução de uma equação diferencial ele conhece também os problemas relacionados com o uso destes métodos para a obtenção de uma solução aproximada.

Tabela 1 – Valores utilizados para a solução da equação (18).

i	2,10, 50 A	T_{viz}	300 K
$R_e^{'}$	0,4 Ω/m	ρ	8933 kg/m^3
D	1 mm	C	385 J/(kgK)
T_∞	300 K	ε	0,8
σ	5.6705119x10^{-8} W/(m^{2}K^4)	H	100 W/m^2

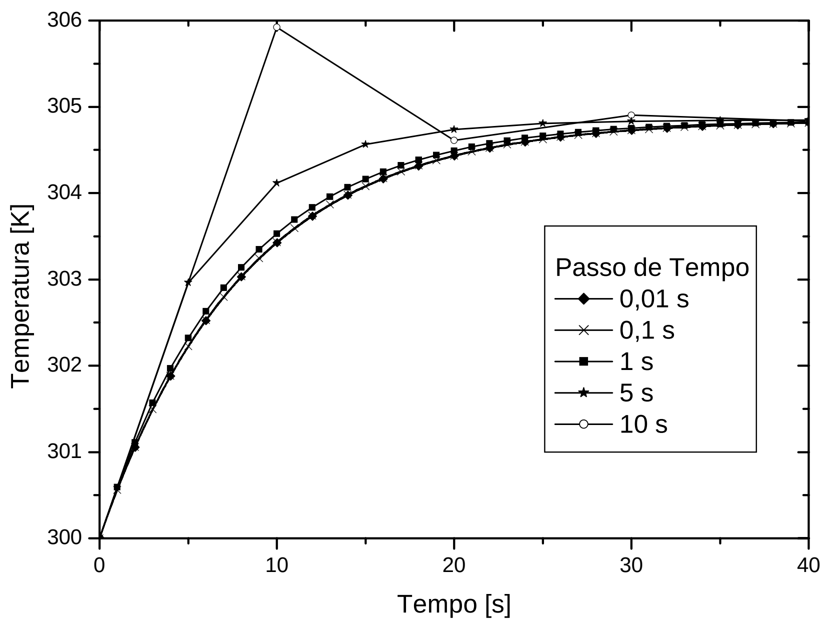

Figura 3 – Solução numérica para diferentes passos de tempo.

Assim, neste trabalho mostrou-se a integração da disciplina Matemática Avançada com a disciplina Condução de Calor, através da exposição de um conteúdo importante para ambas as disciplinas, a solução de equações diferenciais é extremamente importante para a solução de diferentes problemas de engenharia.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na avaliação desta experiência conclui-se que a utilização de problemas relacionados à prática profissional do engenheiro, nas disciplinas de Matemática Avançada, pode contribuir significativamente para o aprimoramento do processo de ensino-aprendizagem e da sua formação profissional. A utilização de problemas, como os citados neste trabalho, tem um alto valor de motivação, desde que utilizada uma metodologia adequada.

Observa-se que a construção do conhecimento não é um processo linear, bem como não existe a preocupação em aula de que o processo ensino aprendizagem seja feito de forma rápida, mas sim que supra as lacunas existentes utilizando diferentes recursos, norteados pela interação do aluno com o processo de ensino-aprendizagem.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CERCAL, J. J., PEDRO, C. R., STEIN, C. E. e BENITO, R. C. V., *O Uso de Ferramentas Computacionais na Prática Pedagógica de Professores de Matemática do Ensino Fundamental*, III Congresso Brasileiro de Computação, Itajaí, 2003.

D'AMBRÓSIO, U. **Educação Matemática: da Teoria à Prática**, Papirus, Campinas, 1996.

FLEMMING, D. M., *Reflexões sobre o uso da Concepção do Conhecimento em Rede nos Projetos Pedagógicos dos Cursos de Engenharia*, Congresso Brasileiro de Ensino em Engenharia, Piracicaba, 2002.

FREIRE, P. **Educação e Mudança**. 2ª edição, Paz e Terra, Rio de Janeiro: 1979.

INCROPERA, F. e DEWITT, D. P., **Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa**, 4ª edição, Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 1998.

MALISKA, C. R., **Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional**, 1ª edição, Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 1995.

VIANA, M. C. V. e MENEZES, M. V., *A Prática da Engenharia Civil nas Disciplinas Básicas de Matemática*, Congresso Brasileiro de Ensino em Engenharia, Porto Alegre, 2001.

VIGOTSKY, L. S, **Pensamiento y Lenguaje**, Editorial Pueblo y Educación, La Habana, Cuba, 1999.

ANALYSIS ON USE OF THE INTEGRATED KNOWLEDGE IN THE EDUCATION IN MECHANICAL ENGINEERING GRADUATE

Abstract: *The Advanced Mathematical discipline of the Graduate Program in Mechanical Engineering at Pontifical Catholic University of Paraná consists of an extensive program where one of the topics is the education of differential equations. With the objective of to improve the lessons and to motivate the students the professors supplies to the basic tools of analytical solution of partial differential equations (when possible) and the students are instigated to search and to consider other analytical or numerical tools to solve the differential equations comparing them, interpreting and making new correlations on the obtained results. This paper presents the reflections of the authors on the necessity to integrate the disciplines, taking in account the formation of students engineer inserted in the socio-economic context and current politician.*

Key-words: *partial differential equations, analytic methods, numerical methods, mathematical education, heat conduction.*