COBENGE 2005
XXXIII - Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia
"Promovendo e valorizando a engenharia em um cenário de constantes mudanças"
12 a 15 de setembro - Campina Grande Pb
Promoção/Organização: ABENGE/UFCG-UFPE

O USO DE METÁFORAS PARA AUXILIAR O PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Rodolfo Miranda de Barros – rodolfo@uel.br
Universidade Estadual de Londrina, Departamento de Computação.
86051-990 – Londrina - PR
Luís Geraldo Pedroso Meloni – meloni@decom.fee.unicamp.br
Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.
13083-852 – Campinas - SP

Resumo: *A educação sempre foi alvo de preocupações, debates e investimentos. Atualmente, devido aos avanços das tecnologias de comunicação e informação, verifica-se um aumento significativo nos debates e investimentos, resultando numa necessidade de se repensar as práticas pedagógicas para melhor atender os alunos. Inserido neste contexto, este trabalho apresenta os resultados de uma pesquisa envolvendo o uso de metáforas e de recursos multimídia para auxiliar o professor na elaboração do material didático de aulas de Cálculo Diferencial e Integral, buscando facilitar o entendimento por parte do aluno. Metáfora pode ser definida como uma transferência de significado que tem como base uma analogia. Usualmente é empregada para esclarecer um conceito pouco familiar, relacionando-o a outro mais familiar. Já a utilização da multimídia traz inúmeras vantagens, tais como: tornar o aprendizado mais agradável, devido à inclusão de diversas mídias; facilita a explanação de conceitos complexos, além de tornar as aulas menos monótonas e despertar no aluno o interesse à investigação.*

Palavras-chave: *Metáfora, Cálculo Diferencial e Integral, Multimídia, Aprendizagem Significativa.*

1. INTRODUÇÃO

A educação sempre foi alvo de preocupações, debates e investimentos por parte dos governos, empresários e da sociedade como um todo (COELHO, 2000). Atualmente, devido à globalização e aos avanços das tecnologias de comunicação e informação, verifica-se um aumento significativo nos debates e investimentos, resultando numa necessidade de se repensar e/ou desenvolver práticas pedagógicas para melhor atender as necessidades dos alunos.

Neste sentido, está em desenvolvimento na Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação (FEEC) da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) um projeto de pesquisa envolvendo o uso de metáforas e de recursos multimídia para auxiliar o professor na elaboração do seu material didático de aulas de Cálculo Diferencial e Integral, objetivando, obviamente, a melhoria do processo de ensino e aprendizagem tanto presencial quanto a distância.

Várias pesquisas foram desenvolvidas e/ou estão em desenvolvimento buscando tornar mais claro e fácil o processo de ensino e aprendizagem do Cálculo. Muitas utilizam o computador e softwares específicos para ajudar na compreensão e entendimento dos conceitos da disciplina. Outras, paralelamente ao uso do computador, introduzem problemas do cotidiano para que os alunos interpretem e desenvolvam uma solução para tais problemas.

Para reforçar a compreensão dos conceitos, esta pesquisa sugere o uso de metáforas e de ferramentas multimídia. Conceito tradicional e essencial para a compreensão do processo de significação da linguagem humana, a metáfora pode ser definida como uma transferência de significado que tem como base uma analogia: dois conceitos são relacionados por apresentarem, na concepção do falante, algum ponto em comum. Uma metáfora é usualmente empregada para esclarecer um conceito pouco familiar relacionando-o a outro conceito mais familiar, não o contrário.

Já a utilização da multimídia como recurso para o processo de ensino-aprendizagem pode trazer inúmeras vantagens, tais como: tornar o aprendizado mais agradável e interessante, devido à possibilidade da inclusão de sons, fotos, imagens, animações entre outras mídias; tornar as aulas menos monótonas e despertar no aluno o interesse à investigação e à descoberta. Com a ajuda dessas ferramentas novas formas de se expressar os conceitos tornam-se viáveis, tais como experiências virtuais.

Segundo BARBOSA e QUEIROZ (2003), a aplicação de ferramentas multimídia na educação matemática introduz os educandos e educadores em um meio que possibilita a sondagem da validez de métodos propostos empiricamente e sanar barreiras epistêmicas adquiridas anteriormente e/ou durante esse processo.

Como os conceitos envolvidos na disciplina de Cálculo são bastante abstratos, a união das metáforas com os recursos multimídia, seria uma forma de transformar estes conceitos abstratos em concretos, facilitando o entendimento. Não se pretende com o uso de metáforas abandonar os conceitos desenvolvidos por Newton e Leibniz (THOMAS *et al*., 2002), mas sim utilizá-las no intuito de melhorar o processo de ensino-aprendizagem do Cálculo, contribuindo, desta forma, para o crescimento cognitivo do aluno.

Este artigo está estruturado da seguinte forma: na próxima seção é apresentada a Teoria de David Ausubel, que fundamenta esta pesquisa. A seção 3 discute sobre o ensino de Cálculo Diferencial e Integral. Já a seção 4 discute sobre metáforas, para, em seguida, na seção 5, apresentarmos algumas metáforas desenvolvidas, e, na seção 6, apresentarmos a aplicação das mesmas na soma de Riemann e no teorema de Green. Finalmente, na seção 7, são apresentadas as conclusões e os trabalhos futuros.

2. A TEORIA DE DAVID AUSUBEL

Ao se pensar em uma teoria de aprendizagem que sirva como fundamentação ao proposto neste trabalho, deparamo-nos com o paradigma teórico-metodológico de David Ausubel, intitulado Aprendizagem Significativa.

A premissa fundamental de Ausubel é: "O aprendizado significativo acontece quando uma informação nova é adquirida mediante um esforço deliberado por parte do aprendiz em ligar a informação nova com conceitos ou proposições relevantes preexistentes em sua estrutura cognitiva” (AUSUBEL *et al*, 1980).

A teoria de Ausubel prioriza a aprendizagem cognitiva, que é a integração do conteúdo aprendido numa edificação mental ordenada, a estrutura cognitiva. Essa estrutura cognitiva representa todo um conteúdo informacional armazenado por um indivíduo, organizado de uma certa forma em qualquer modalidade do conhecimento. O conteúdo previamente detido pelo indivíduo representa um forte influenciador do processo de aprendizagem. Novos dados serão assimilados e armazenados na razão direta da qualidade da estrutura cognitiva prévia do aluno ou aprendiz.

Para Ausubel, a aprendizagem pode se processar entre os extremos da aprendizagem mecânica e a aprendizagem significativa. A aprendizagem mecânica está relacionada com a aprendizagem de novas informações, com pouca ou nenhuma associação com conceitos relevantes existentes na estrutura cognitiva do aluno. O aluno simplesmente recebe a informação e a armazena, de forma que ela permanece disponível por um certo intervalo de tempo. Mas, na ausência de outras informações que lhe sirvam de combinação, permanece na estrutura cognitiva de forma estática. Este tipo de aprendizado ocorre quando as novas informações são aprendidas sem interagirem com conceitos relevantes existentes na estrutura cognitiva. Assim, a pessoa decora fórmulas, leis, procedimentos para provas e esquece logo após a avaliação.

Já a aprendizagem significativa, que tem como base as informações já existentes na estrutura cognitiva, é considerada por Ausubel como idéia-âncora ou subsunçor. O subsunçor é uma estrutura específica ao qual uma nova informação pode se integrar à mente humana, que é altamente organizada e detentora de uma hierarquia conceitual que armazena experiências prévias do aluno. Sendo assim, as novas informações podem interagir contribuindo para a transformação do conhecimento em novos conhecimentos, de forma dinâmica, não aleatória, mas relacionada entre a nova informação e os aspectos relevantes da estrutura cognitiva do indivíduo. Em outras palavras, pode-se dizer que a aprendizagem significativa ocorre quando a nova informação ancora-se em conceitos relevantes pré-existentes na estrutura cognitiva do aluno.

Analisando o exposto anteriormente, conclui-se que a aprendizagem significativa é preferível à aprendizagem mecânica, pois constitui um método mais simples, prático e eficiente. Muitas vezes um indivíduo pode aprender algo mecanicamente e só mais tarde perceber que este se relaciona com algum conhecimento anterior já dominado. No caso ocorreu então um esforço e tempo demasiado para assimilar conceitos que seriam mais facilmente compreendidos se fosse encontrada uma “âncora", ou um conceito subsunçor, existente na estrutura cognitiva.

Segundo Ausubel, para que ocorra a aprendizagem significativa, duas condições são fundamentais:

- O aluno precisa ter uma disposição para aprender: se o indivíduo quiser memorizar o material arbitrariamente e literalmente, então a aprendizagem será mecânica;
- O material a ser aprendido tem que ser potencialmente significativo, ou seja, ele tem que ser logicamente e psicologicamente significativo: o significado lógico depende somente da natureza do material, e o significado psicológico é uma experiência que cada indivíduo tem.

Uma grande questão levantada pela teoria de Ausubel diz respeito a origem dos subsunçores. Se eles não estiverem presentes para viabilizar a aprendizagem significativa, como é possível criá-los? Segundo Ausubel a aprendizagem mecânica é necessária e inevitável no caso de conceitos inteiramente novos para o aprendiz, mas posteriormente ela passará a se transformar em significativa. Para acelerar esse processo, Ausubel propõe os organizadores prévios, âncoras criadas a fim de manipular a estrutura cognitiva, interligando conceitos aparentemente não relacionáveis através da abstração. Vários investigadores que compartilham a preocupação de Ausubel têm estudado outros fatores, tais como analogias, metáforas, exemplos e modelos concretos que ajudam os aprendizes a vincular conceitos novos com os familiares para desenvolver referentes concretos para os conceitos abstratos.

3. O CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

O cálculo diferencial e integral figura entre as disciplinas básicas de diversos cursos superiores. Esta disciplina ajuda na resolução de problemas ligados às ciências físicas e à engenharia, bem como à biologia e às ciências sociais. Mais especificamente, os conceitos de cálculo permitem tratar fenômenos tão diversos como a queda de um corpo, o crescimento populacional, o equilíbrio econômico, a propagação do calor e do som, entre outros. O cálculo é um instrumento muito eficaz na modelagem de situações concretas que envolvem a idéia de taxa de variação.

Percebe-se que o cálculo é uma das disciplinas mais tradicionais e que mais tem preservado sua estrutura original. Vale ressaltar que, apesar do surgimento de calculadoras e computadores, a estrutura do cálculo é essencialmente a mesma desde o seu surgimento, no final do século 17, ou seja, há mais de 300 anos, quando Newton e Leibniz desenvolveram, independentemente, as idéias básicas do cálculo. A metodologia usada pela maioria dos professores desta disciplina prioriza a aula expositiva, é centrada na fala do professor, e os conceitos são apresentados como verdades inquestionáveis, como algo pronto e acabado, sem a preocupação de torná-los significativos. Os alunos, por sua vez, acabam resolvendo os exercícios propostos mecanicamente, sem que se exija dos mesmos criatividade e reflexão frente aos problemas, o que os levam a questionar, muitas vezes, a razão da disciplina dentro de sua grade curricular. Ou seja, os cursos de cálculo em geral, ainda hoje, priorizam mais as operações e técnicas de cálculo do que a significação para o aluno.

Neste sentido, o grande problema encontrado no ensino de cálculo está relacionado com a dificuldade dos alunos em desenvolver habilidade para construir a compreensão dos conceitos matemáticos de tal forma que pudessem interpretar o significado dos conceitos, reconhecer quando aplicá-los e perceber a extensão e as limitações desta aplicabilidade. Estes conceitos muitas vezes são abstratos, o que dificulta ainda mais a compreensão dos alunos.

O ensino de Cálculo nas universidades brasileiras, como em universidades do exterior, tem sido objeto de questionamento em diversos fóruns em função das dificuldades apresentadas pelos alunos na sua aprendizagem, bem como pela alta evasão dos estudantes dos primeiros períodos, matriculados nessa disciplina. Grande é o interesse de educadores matemáticos por todo o mundo a esse respeito, assim como são muitas as pesquisas que procuram mostrar alternativas para a melhoria desse ensino. Muitas utilizam o computador e softwares específicos para ajudar na compreensão e entendimento dos conceitos da disciplina. Outros, paralelamente ao uso do computador, introduzem problemas do cotidiano para que os alunos interpretem e desenvolvam uma solução para tais problemas.

4. METÁFORAS

Segundo SILVA (2003), a metáfora é um fenômeno conceptual por natureza, processo e modelo cognitivo, constitutivo do nosso sistema conceptual, modo natural de pensar e de falar, tanto na linguagem corrente como no discurso científico, radicado na experiência humana e responsável quer pela estruturação do pensamento, da linguagem e da ação, quer pela inovação conceptual. Especificamente, a metáfora é um importante mecanismo cognitivo pelo qual domínios da experiência mais abstratos e intangíveis podem ser conceptualizados em termos do que é mais concreto e imediato.

Na linguagem de todos os dias, temos que fazer referência a conceitos abstratos como o tempo, as relações interpessoais ou a própria vida, e fazemo-lo habitualmente em termos metafóricos: conceitualizamos e verbalizamos o tempo em termos espaciais, a vida como uma viagem, as teorias intelectuais e científicas como edifícios, a discussão como guerra (LAKOFF E JOHNSON, 1980).

Segundo LAKOFF e TURNER (1989), a metáfora é uma figura de linguagem que compara seletivamente destacando as qualidades de um sujeito consideradas importantes para aquele que a usa. Para eles, a metáfora é uma ponte que liga domínios semânticos diferentes fazendo, assim, com que percebamos novos caminhos para a compreensão da matéria. A metáfora é uma maneira de expandir os significados de palavras além do literal ao abstrato e uma maneira de expressar o pensamento abstrato em termos simbólicos.

As metáforas podem adotar várias formas, dependendo do efeito que se deseja, do conteúdo que se quer veicular, do tempo disponível, do interlocutor ou de grupo de ouvintes. Alguns tipos de metáforas que interessam à educação são as imagens, as comparações, os provérbios, as anedotas, os mitos, as narrações, parábolas e histórias.

MAZILLI (1996) descreve da seguinte maneira a criação de uma metáfora: o primeiro passo para se criar uma metáfora é saber o estado atual e o estado desejado do ouvinte. A metáfora será a história ou a jornada de um ponto para o outro; decodifique os elementos de ambos os estados: pessoas, lugares, objetos, atividades, tempo, sem perder de vista os sistemas representacionais e submodalidades de cada um desses elementos; escolha um contexto adequado para a história. Dê preferência para um que seja interessante, e substitua os elementos do problema por outros elementos, porém mantendo a relação entre eles; crie a trama da história de maneira que ela tenha a mesma forma do estado atual e conduza-a, através da estratégia de ligação, até a solução do problema (o estado desejado).

5. METÁFORAS DESENVOLVIDAS

As metáforas desenvolvidas no escopo desta pesquisa possuem uma descrição e são, por vezes, acompanhadas de tabelas e gráficos ilustrativos para ajudar na compreensão do aluno. Algumas delas, além da descrição e gráficos, também trazem animações para contribuir com o aprendizado do aluno.

Para o desenvolvimento dos gráficos e animações foram utilizados os softwares Microsoft VISIO (http://www.microsoft.com) e MAPLE (http://www.maplesoft.com/). O MAPLE é um software matemático cuja característica principal é a possibilidade de trabalhar com expressões na forma algébrica. Este software permite resolver problemas levando a soluções analíticas e exatas, em diversas áreas da matemática, destacando-se o Cálculo Diferencial e Integral. Além de trabalhar com operações algébricas, o MAPLE possui ferramentas gráficas para a visualização de resultados, podendo elaborar gráficos em duas ou três dimensões e gráficos animados. Também foram desenvolvidas aplicações interativas em Java, onde o aluno introduz valores e obtém resultados.

Vale ressaltar que as metáforas são arquivos HTML (HyperText Markup Language - Linguagem de Formatação de Hipertexto), possibilitando que o professor as utilize dentro de qualquer ferramenta de autoria, tal como o FrontPage da Microsoft (http://www.microsoft.com), em qualquer ferramenta de gerenciamento de cursos a distância, tais como o AULANET (http://guiaaulanet.eduweb.com.br/) e o WebCT (http://www.webct.com), ou mesmo em aulas presenciais ministradas em laboratórios de informática.

5.1 METÁFORA DO INFINITO E INFINITÉSIMO VIA TABULEIRO DO JOGO DE XADREZ

Utilizando-se de uma linguagem popular (informal), diríamos que o infinito seria algo sem fim, que se repete ou que se caminha sem se encontrar um final. Obviamente, esse processo de repetição sem fim ou de caminhar sem se encontrar um final está além das atividades que fazemos no dia-a-dia, onde, por exemplo, viajamos de um lugar para outro, ou uma criança pula, pula, pula até se cansar.

Diz uma lenda que em um antigo reino do oriente médio um rei solicitou um serviço a um estranho viajante. O visitante cobrou o serviço em grãos de trigo, que seriam contados da seguinte forma: através do uso de um tabuleiro de xadrez de 64 casas, ele colocaria um grão na primeira casa, dois grãos na segunda casa, quatro grãos na terceira casa, dobrando sucessivamente até preencher todas as casas do tabuleiro de xadrez. Ao final, o rei pagaria com o número de grãos resultantes desta soma de grãos. Diz a lenda que o rei aceitou prontamente o preço do viajante, mas depois que realizou as contas descobriu que nem toda a produção de trigo de seu reino seria suficiente para pagar o viajante.

Estudos demonstram que os termos envolvidos na definição formal de limite criam dificuldades cognitivas nos alunos (TALL, 1992). Termos como 'tende a', 'se aproxima de', entre outros, geram dificuldades no processo de aprendizagem do Cálculo.

Para compreender o significado das expressões 'se aproxima de zero' (ou 'tende a zero') e 'tendendo para o infinito', faremos uma adaptação à lenda descrita anteriormente. O tabuleiro do xadrez possui 64 casas. Colocaremos 1 grão na primeira casa e, a partir da segunda, multiplicaremos por 10 a casa antecessora:

$$\text{Valor Máximo} = 10^{(\text{Número de Casas do Tabuleiro} - 1)} \qquad (1)$$

Obviamente, a ordem é crescente e finaliza com 10^{63} na última casa. Caso um novo tipo de tabuleiro fosse criado, por exemplo, com 128 casas, teríamos um número ainda maior na última casa, 10^{127}. Caso fizéssemos este processo de maneira repetitiva, ou seja, aumentássemos o número de casas, teríamos números cada vez maiores na última casa. Vamos definir o valor máximo da última casa do tabuleiro como sendo o infinito (uma quantidade que tende infinitamente a um certo número sem jamais ser exatamente este número). Percebe-se que quanto maior o número de casas do tabuleiro, maior será o valor máximo. Na verdade, este número tende para o infinito (Figura 1).

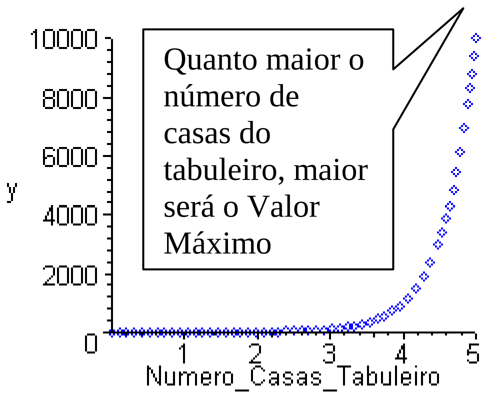

Figura. 1: Gráfico da função *f*

A partir do valor máximo (infinito), pode-se estender à expressão 'se aproxima de zero'. Para tanto, basta tomar o inverso do valor máximo (*h*), quanto maior o valor máximo (infinito), menor o valor do inverso *h*. Percebe-se também que *h* tende a zero, mas não chega a ser. Na verdade, este número nunca será zero, mas um número muito próximo de zero, ou seja, 'se aproxima de zero' ou 'tende a zero' (Figura 2).

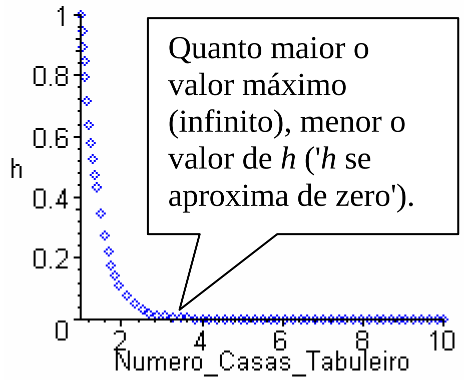

Figura. 2: Gráfico da função *h* ('*x* se aproxima de 0')

5.2 METÁFORA DIVIDIR PARA CONQUISTAR

A metáfora dividir para conquistar é baseada numa tática de guerra do imperador romano Júlio César, que mandava espiões para semear discórdia nos países a serem conquistados, enfrequecendo-os. A idéia básica desta abordagem é a seguinte: um problema difícil é por vezes divisível num conjunto de problemas cuja resolução é relativamente fácil. Para tanto, podemos primeiramente dividir o problema em subproblemas (menores), em seguida resolver estas novas instâncias e, finalmente, intercalar os resultados desses subproblemas para achar a solução do problema principal, ou seja, dividir para alcançar o todo (conquistar o todo).

5.3 METÁFORA DA CÂMERA FOTOGRÁFICA DIGITAL

Esta metáfora visa apresentar a questão da resolução de figuras ou imagens (espaço bi-dimensional). Este problema é bastante antigo e conhecido desde a transmissão das primeiras fotos a longas distâncias em jornais. Nitidamente, nestas fotos podia-se observar os pontos ou *pixels* que formam a imagem. A questão da resolução de uma imagem aparece em diversos aparelhos do cotidiano, tais como, monitores de vídeo, televisores, impressoras e na câmera fotográfica digital. Vale a pena observar que apenas o número de *pixels* de uma imagem não define a resolução da mesma. Por exemplo, tomando-se os monitores de computadores VGA de definição de 800x600 *pixels*, dependendo-se do tamanho do monitor, e.g. 14´´ ou 17´´, a resolução seria diferente. Para definir a resolução perceptiva é necessário fixar o número de *pixels* por unidade de medida, por exemplo, para impressoras, usa-se o número de pontos por polegadas (dpi - *dots per inches*).

Preferimos aqui empregar a metáfora da câmera fotográfica digital, onde se observa uma evolução da tecnologia com câmeras de 2, 3, 4, 5 ou mais *megapixels*. Para uma foto impressa em papel de tamanho médio (as dimensões exatas são irrelevantes), a resolução será crescente conforme o número de *pixels* da câmera. Em fotos impressas com contornos curvilíneos é mais difícil ou mesmo imperceptível observar distorções para câmeras de alta definição, mesmo quando se imprime em papel de grande tamanho.

6. APLICAÇÕES DAS METÁFORAS

Nesta seção são apresentados dois exemplos de aplicações das metáforas descritas anteriormente, mais especificamente, aplicações na soma de Riemann e no teorema de Green.

6.1 APLICAÇÕES DE METÁFORAS NA SOMA DE RIEMANN

Considere o problema do cálculo da área sob uma curva acima do eixo x (Figura 3), isto é o cálculo da integral definida. Pode-se dividir o intervalo [a, b] em n subintervalos escolhendo $n-1$ pontos, $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$, entre a e b, sujeitos à condição de que $a<x_1<x_2 ...<x_{n-1}<b$. O conjunto P = { $x_0, x_1, ..., x_n$} é chamado de partição de [a, b], onde denotamos a por x_0 e b por x_n. A partição P define n subintervalos fechados, onde o subintervalo genérico [x_{k-1}, x_k] é chamado k-ésimo subintervalo de P. O comprimento do k-ésimo subintervalo é: $\Delta x_k= (x_k - x_{k-1})$. Percebe-se que quanto maior o número de subintervalos, menor será a diferença Δx_k. Em cada subintervalo seleciona-se um número qualquer. Denota-se o número escolhido do k-ésimo subintervalo por c_k.

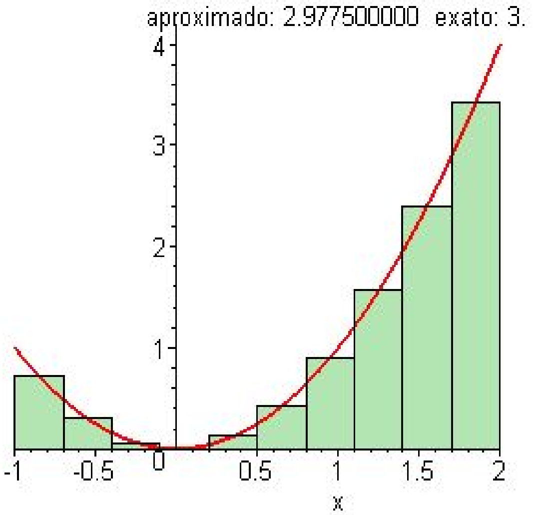

Figura 3: Região dividida em subintervalos

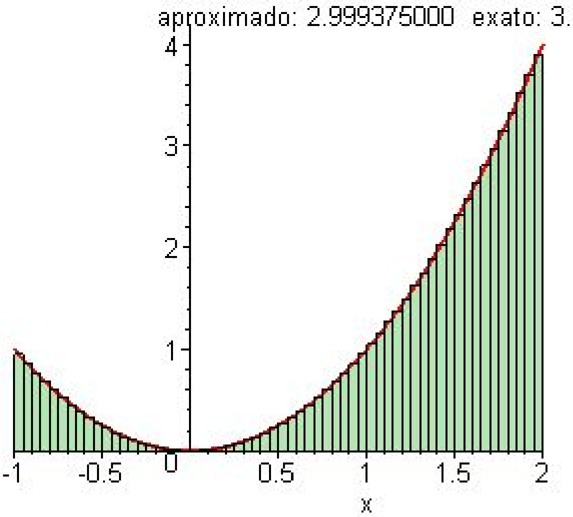

Figura 4: Aumentando o número de partições

A seguir, em cada subintervalo constroi-se um retângulo com uma base no eixo x e que toca a curva em $(c_k, f(c_k))$. Esses retângulos podem estar tanto acima como abaixo do eixo. Em cada subintervalo, formamos o produto $f(c_k). \Delta x_k$. Esse produto pode ser positivo, negativo ou nulo, dependendo de $f(x)$. Se realizarmos a soma desses produtos (2), teremos uma aproximação da área da curva sobre o eixo x.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \qquad (2)$$

Essa equação é chamada de soma de Riemann para f no intervalo [a,b]. Observa-se que aqui um problema complexo é dividido em problemas mais simples de cálculo de áreas de retângulos. Dividiu-se o problema em problemas menores para se chegar à solução, tal como na metáfora dividir para conquistar.

Percebe-se ainda que o cálculo da área depende diretamente da partição P e da definição do número de subintervalos. À medida que as partições se tornam cada vez menores, a aproximação fica cada vez melhor e a área é medida com maior precisão (Figura 4). A área exata será alcançada quando o comprimento dos subintervalos Δx_k tender a zero (metáfora do infinitésimo do tabuleiro de xadrez).

O mesmo fenômeno é observado quando se imprimem fotos de figuras tiradas com câmeras digitais de resolução crescente. O intervalo Δx_k pode ser imaginado como o espaçamento entre pixels da imagem, a partir de certa resolução os pequenos degraus da figura tornam-se imperceptíveis.

Vale ressaltar que as Figuras 3 e 4 foram extraídas de uma aplicação dinâmica desenvolvida no MAPLE, que mostra o número de partições aumentando e o valor aproximado da área chegando próximo do valor exato. Por meio da aplicação também é possível visualizar o seguinte dilema: se c_k fosse escolhido como o ponto inicial de cada subintervalo, isto levaria o aluno a imaginar uma situação de subestimativa da área para $f(x)$ da figura; ao passo que se c_k fose escolhido como ponto final de cada subintervalo, a área estaria superestimada. Conforme Δx_k tende a zero a aproximação em degraus tende a *f(x)* e conduz à área exata, tal como o aumento da resolução em impressões de uma câmera digital, o que pode ser facilmente comprovado pela aplicação MAPLE.

6.2 APLICAÇÕES DAS METÁFORAS NO TEOREMA DE GREEN

O teorema de Green nos diz que: seja C uma curva simples fechada em volta de uma região R do plano e orientada de modo que a região está à esquerda quando nos movemos sobre a curva no sentido anti-horário. Suponhamos que $\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j}$ é um campo de vetores liso definido em cada ponta da região R e da fronteira C. Então:

$$\int_C \vec{F}.d\vec{r} = \int_C \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy \qquad (3)$$

Neste exemplo, novamente as três metáforas vistas se aplicam. Vamos explicar o teorema de Green primeiramente utilizando-se da metáfora dividir para conquistar. Portanto, vamos dividir a região R em vários quadrados conforme mostra a Figura 5.

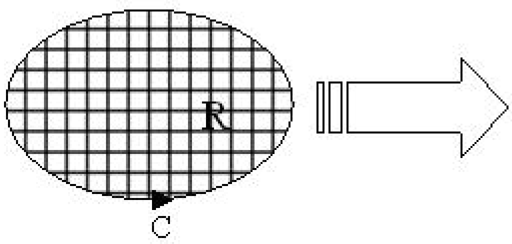

Figura 5: Região R limitada por uma curva C e dividida em muitas regiões ΔR

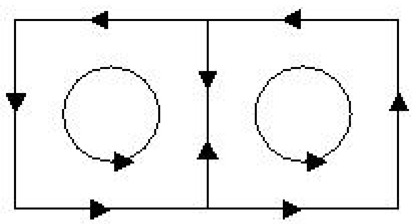

Figura 6: Duas pequenas curvas fechadas adjacentes

Sabe-se que a integral de linha é zero se $\vec{F}$ é perpendicular ao caminho em todos os pontos, ou se as contribuições positivas e negativas se cancelam. Isto é o que ocorre quando se soma as integrais de linha sobre a reta comum que separa duas regiões adjacentes ΔR, como na Figura 6. Como as circulações são tomadas em sentido anti-horário, para cada lado comum, as integrais de linha se anulam. Restam, portanto, as integrais de linha na fronteira da região.

Na seqüência de raciocínio, faz-se o tamanho dos quadrados tender a zero, levando a inúmeros quadrados (metáfora do infinitésimo do tabuleiro de xadrez). Observando-se a Figura 7, as circulações das regiões adjacentes se anulam, visto que são cortadas duas vezes, uma em cada direção (vermelho e azul), restando somente a circulação externa. A metáfora da câmera fotográfica digital pode ainda ser empregada na fronteira, onde os retângulos poderiam ser definidos por 4 pixels adjacentes. Conforme a resolução aumenta os pequenos “degraus” tornam-se imperceptíveis, aproximando-se cada vez mais da curva *C*.

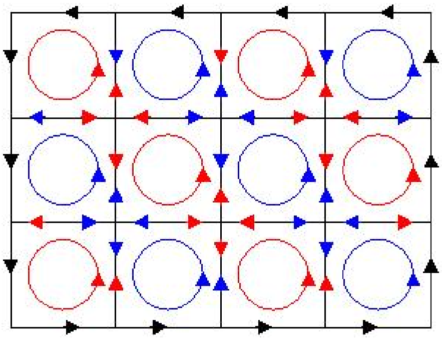

Figura 7: Região R dividida em pequenos quadrados

A partir do exposto, tem-se:

$$\text{Circulação de } \vec{F} \text{ em torno de C} = \sum_{\Delta C} \text{Circulação de } \vec{F} \text{ em torno de } \Delta C \qquad (4)$$

Analisando somente uma pequena curva fechada ΔC, dividimos ΔC em C_1, C_2, C_3 e C_4. Então calculamos integrais de linha C_1 e C_3, onde $\Delta\vec{r}$ é paralelo ao eixo-x de modo que $\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i}$. Assim, sobre C_1 e C_3 tem-se:

$$\vec{F}.\Delta\vec{r} = (F_1\vec{i} + F_2\vec{j}).\Delta x\vec{i} = F_1\Delta x \qquad (5)$$

Porém a função F_1 é calculada em (x, y_0) em C_1 e em $(x, y_0+\Delta y)$ em C_3 de modo que:

$$\int_{C_1} \vec{F}.d\vec{r} + \int_{C_3} \vec{F}.d\vec{r} = \int_{C_1} F_1(x, y_0)dx + \int_{C_3} F_1(x, y_0 + \Delta y)dx \qquad (6)$$

$$= \int_{x_o}^{x_o+\Delta x} F_1(x, y_0)dx + \int_{x_0+\Delta x}^{x_o} F_1(x, y_0 + \Delta y)dx = \int_{x_o}^{x_o+\Delta x} F_1(x, y_0)dx - \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} F_1(x, y_0 + \Delta y)dx \qquad (7)$$

$$= \int_{x_o}^{x_o+\Delta x} (F_1(x, y_0) - F_1(x, y_0 + \Delta y))dx \qquad (8)$$

Como F_1 é diferenciável e Δy é pequeno (metáfora infinitésimo do tabuleiro de xadrez), tem-se:

$$F_1(x, x_0) - F_1(x, y_0+\Delta y) = -\,(F_1(x, y_0+\Delta y) - F_1(x, y_0)) = -\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y_o)\Delta y \qquad (9)$$

De modo que temos:

$$= \int_{x_o}^{x_o+\Delta x} (F_1(x, y_0) - F_1(x, y_0 + \Delta y))dx \approx -\left(\int_{x_o}^{x_o+\Delta x} \frac{\partial F_1}{\partial y} dx \right)\Delta y \qquad (10)$$

Supondo que $\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y_o)$ é aproximadamente constante no intervalo $x_0 \leq x \leq x_0\Delta x$ vem:

$$-\left(\int_{x_o}^{x_o+\Delta x} \frac{\partial F_1}{\partial y} dx \right)\Delta y \approx -\frac{\partial F_1}{\partial y}(x_0, y_0)\left(\int_{x_o}^{x_o+\Delta x} dx \right)\Delta y = -\frac{\partial F_1}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta x\Delta y \qquad (11)$$

Por um argumento semelhante sobre C_2 e C_4, tem-se:

$$\int_{C_2} \vec{F}.d\vec{r} + \int_{C_4} \vec{F}.d\vec{r} \approx \frac{\partial F_2}{\partial_x}\Delta x\Delta y \qquad (12)$$

Combinando os resultados para C_1, C_2, C_3 e C_4, e somando sobre todas as pequenas regiões ΔR tem-se:

$$\int_C \vec{F}.d\vec{r} = \sum_{\Delta C} \int_{\Delta C} \vec{F}.d\vec{r} \approx \sum_{\Delta R} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y \qquad (13)$$

A equação (13) é uma soma de Riemann que aproxima uma integral dupla, na passagem ao limite em que Δx e Δy tendem a zero. Desta forma, segue (3).

O emprego das metáforas permite uma maior compreensão e maior confiança no aprendizado por parte dos alunos, e possibilita muitas vezes que demonstrações mais tediosas fiquem num segundo plano do processo de ensino.

7. CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

A idéia básica desta pesquisa é auxiliar o processo de ensino-aprendizagem de Cálculo aumentando a compreensão por parte do aluno dos conceitos envolvidos. Não é intenção do trabalho abandonar os conceitos formais. As metáforas apresentadas são simples, e buscam apresentar os conceitos através de uma linguagem ou exemplo mais próximo do aluno, da sua realidade, do seu dia-a-dia. Desta forma, quando o conceito for solicitado na resolução de um exercício qualquer, o aluno vai ser capaz de associar o conceito requisitado com a metáfora e, conseqüentemente, ter uma melhor compreensão dos tópicos em estudo.

Para armazenar e consultar as metáforas, esta pesquisa também objetiva a implementação de um repositório para armazenamento e consulta via Internet. É intenção da pesquisa que esta ferramenta de consulta e armazenamento de metáforas trabalhe independentemente da forma como o professor deseja publicar o conteúdo do seu curso, seja a publicação através de uma ferramenta de gerência de cursos a distância ou diretamente na Internet, possibilitando, desta forma, uma total liberdade para o professor criar o conteúdo do seu curso utilizando-se do repositório de metáforas.

Desenvolvida a ferramenta de consulta e armazenamento de metáforas, um próximo passo seria utilizar a XML (eXtensible Markup Language), que é uma linguagem de marcadores como a HTML, e foi desenhada para descrever dados. A sua grande vantagem é ela ser extensível, ou seja, a XML permite que o autor defina as suas próprias *tags* e a própria estrutura do seu documento. Para criação das *tags*, será usada a estrutura já trabalhada na criação das metáforas, ou seja, a descrição da metáfora, tabelas, gráficos ilustrativos e animações.

Para exibir documentos XML será necessário um mecanismo que descreva como o documento será exibido. Esse mecanismo chama-se XSL (eXtensible Stylesheet Language) e é usado para transformar XML em HTML. Além de transformar XML em HTML, a XLS pode filtrar e ordenar dados em documentos XML, como também formatar dados XML, criando as chamadas folhas de estilo.

Com a possibilidade de se criar folhas de estilo, o mesmo conteúdo poderá ser apresentado de diversas formas, trazendo opções para que professor possa apresentar o conteúdo das metáforas de acordo com a necessidade de um aluno ou da melhor maneira que ele julgar necessário do ponto de vista didático, por exemplo: uma folha de estilo pode trazer a metáfora somente com dados textuais, já outra folha de estilo pode trazer a mesma metáfora com dados textuais e alguma animação gráfica.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AUSUBEL, D. P. *et al*. **Psicologia Educacional.** Rio de Janeiro: Interamericano, 1980.

BARBOSA, R. E. P. L.; QUEIROZ, L. C. Recursos multimídia aplicados à educação matemática. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 14, 2003, Rio de Janeiro. **Anais** Rio de Janeiro: UFRJ, 2003. P. 753-755.

COELHO, C.; FLEMMING, D. M.; LUZ, E. F. Desenvolvimento de material didático para educação a distância no contexto da educação matemática. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA, 7, 2000, São Paulo. **Anais eletrônicos...** São Paulo: Associação Brasileira de Educação a Distância, 2000. Disponível em: <http://www.abed.org.br/congresso2000/texto12.doc>. Acesso em: 15 mar. 2005.

LAKOFF, G.; JOHNSON, M. **Metaphors We Live By**. Chicago: The University of Chicago Press, 1980.

LAKOFF, G.; TURNER, M. **More than cool reason: a field guide to poetic metaphor**. Chicago: University of Chicago Press, 1989.

MAZILLI, J.C. **Manual de Programação Neurolingüística** São Paulo: Edição do Autor, 1996.

McCALLUM, W. G. *et al*. **Cálculo de várias variáveis.** São Paulo: Editora Edgard Blucher, 1997.

SILVA, A. S. O poder cognitivo da metáfora e da metonímia. **Revista Portuguesa de Humanidades**. Braga, n. 7, p. 13-75, 2003.

TALL, D. **Students' difficulties in calculus**. Plenary presentation in working group 3 at ICME 7, 1992.

THOMAS, G. *et al*. **Cálculo**. Rio de Janeiro: Addison Wesley, 2002.

THE USE OF METAPHORS TO SUPPORT THE DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS TEACHING-LEARNING PROCESS

Abstract: *Education has always been the aim of concerns, discussions and investments. Currently, due to the globalization and the progress of the communication and information technologies, a significant increase is verified in the discussions and investments, resulting in needing of rethinking and to develop pedagogical practices to assist the student's needs. This paper presents the results of a research involving the use of metaphors and multimedia resources to help the teacher to elaborate the didactic material for Calculus classes. The metaphor can be defined as a meaning of transference that has an analogy as a basis. A metaphor is usually used to clarify a not very familiar concept to relate it with other familiar concept. The use of multimedia resource can bring countless advantages, such as: becoming the learning more pleasant and interesting, due to the possibility of the inclusion of several medias, easing the explanation of complex concepts, and making the classes less monotonous.*

Key-Words*:* *Metaphors, Calculus, Multimedia, Significant Learning.*