ENSINO INTEGRADO NAS AULAS DE CÁLCULO DE VÁRIAS VARIÁVEIS

Gertrudes A. Dandolini - gtude@ieg.com.br
Lucas Vanini - vanini@ufpel.tche.br
João A. Souza - jgartur@ieg.com.br
Universidade Federal de Pelotas/Departamento de Matemática, Estatística e Computação
Rua Senador Carlos Barbosa, 241, Três Vendas
96020-240 - Pelotas – RS

Resumo: *O uso de software na modernização do Cálculo de Várias Variáveis é uma proposta de nova metodologia, de uma experiência de ensino Integrado com alternativas de tecnologia computacional para conceitos de Cálculo em nível de graduação, especialmente para as engenharias. Os conceitos básicos podem ser apresentados simbólico, gráfica e numericamente. O uso de múltiplas representações poderá ser visto como uma forma de melhorar o nível de aprendizado e apropriar o currículo ao uso de softwares algébricos. Dentro dessa linha de raciocínio é possível, com a ajuda de alguns programas computacionais, tornar a visualização mais imediata, menos abstrata e de melhor compreensão em diversas áreas do cálculo. A tecnologia computacional tem mostrado que pode trazer benefícios ao ensino-aprendizagem de vários conteúdos matemáticos. É importante ressaltar que o presente artigo não busca simplesmente um uso de comandos de um determinado programa, mas sim uma análise de conceitos através do software. Além disso, a abordagem adotada visa o aprimoramento dos conhecimentos adquiridos nas aulas de Cálculo. O software Maple® será utilizado para a resolução de questões relacionadas a essa disciplina, bem como um método eficaz de aprendizagem.*

Palavras-chave: Ensino integrado, Cálculo, Ensino-aprendizagem, Software Maple®.

1. INTRODUÇÃO

No atual sistema de ensino, o estudo do cálculo vem se desenvolvendo de uma tal forma onde o mais importante é a exposição excessiva, isto é, a repetição, a memorização dos conteúdos de modo que ensinar tem um significado de somente informar, onde na maioria das vezes as aulas estão totalmente desprovidas de significados. A precariedade do sistema vigente, nos cursos de cálculo tanto para as Engenharias como para as diversas áreas das exatas, tem uma conseqüência seriíssima para o futuro profissional do aluno (NASCIMENTO e NASSER, 1997).

A sociedade na qual estamos inseridos vive o desenvolvimento tecnológico na área de informática o que vem causando uma revolução na criação e exploração de novas metodologias de ensino. A universidade é um espaço de produção e divulgação de conhecimentos ao mesmo tempo em que é um espaço de formação de profissionais para a nossa sociedade. O futuro engenheiro, por sua vez, vivendo em meio a essa revolução da informática deverá apresentar a habilidade de relacionar e aproveitar ao máximo esse importante aliado (ÁVILA, 1993; MURPHY, 1999).

O que está acontecendo é que nos cursos de engenharias as disciplinas básicas, estão dissociadas das disciplinas profissionalizantes e isso é um fator evidente na desmotivação tanto de alunos como de professores. Os cursos de cálculo, desde cálculo diferencial ao avançado e numérico, apresentam índices absurdamente elevados de abandono e insucesso (PALIS, 1995).

Esses fatores apontam para a necessidade de se buscar alternativas de ação pedagógica que, juntamente com outros meios, possam vir a afastar esse problema que, desde muito tempo reside nas universidades.

O cálculo desenvolveu-se numa interação múltipla com vários ramos da ciência e, sobretudo com a Física. Logo é um instrumento fundamental de físicos, engenheiros, químicos, biólogos, estatísticos, economistas, sendo utilizado nos mais variados ramos da ciência e da tecnologia. Seus conceitos são fundamentais, profundos e sutis. Desta forma é necessário uma devida apreciação desses conceitos que só serão adquiridos gradualmente e por via intuitiva (HUGHES-HALLETT et al. 1997).

Por todas essas razões é que o cálculo deve ser apresentado de uma forma menos formalista e tornando a visualização mais imediata e clara. O cálculo obteve tanto sucesso devido ao seu enorme poder de transformar um problema complicado em uma regra de simples procedimento. Contudo deve-se tomar cuidado para se ensinar o assunto sem perder o contato tanto com a matemática quanto com seu valor prático e principalmente teórico.

Segundo MURPHY (1999), desde a década de 80, estão acontecendo inúmeros movimentos de reforma do cálculo aliadas às reformas curriculares. Objetivando enfatizar, em seus conteúdos, o que é realmente essencial e buscar maneiras novas e criativas para poder melhorar o desempenho dos estudantes na compreensão desses conteúdos. As reformas enfatizam, ainda, o uso do computador.

Utilizando esta análise, fica evidente e nos permite concluir que a utilização de programas computacionais, tais como Maple®, MatLab®, Scilab e outros, de uma maneira eficiente pode ser de extrema importância no sentido de promover o desenvolvimento do pensamento matemático, integrando aspectos geométricos, numéricos e analíticos tornando a visualização de alguns conceitos do cálculo mais imediata e de melhor compreensão.

Nessa busca contínua de alternativas de ação pedagógica, o uso de software no ensino de cálculo funciona como um fator de motivação aos alunos e além disso cria no estudante um espírito de pesquisador. Optou-se pela utilização de recursos computacionais, através do software Maple®. Trata-se de um programa que além de várias aplicações na parte algébrica, proporciona excelente visualização geométrica e rápida obtenção de resultados, tanto algébricos como numéricos (ALVES, 1997; ABEL e BRASELTON, 1994 e REDFERN, 1996). Seus comandos, de fácil entendimento, proporcionam um manuseio da sintaxe matemática geral, tal como é, usualmente expressa. Tudo isso permite que o programa seja facilmente compreendido pelos usuários, não oferecendo dificuldades iniciais, geralmente observados na utilização de outros softwares matemáticos (MARLIN e KIM, 1999). Além disso seu alcance computacional é perfeitamente adequado às necessidades do cálculo.

O artigo tem como objetivo promover uma reformulação do ensino de cálculo. Nesse contexto, a metodologia será desenvolvida com o objetivo de propor sugestões que permitam superar dificuldades de matemática básica e desenvolver os conteúdos matemáticos referentes à própria disciplina, para torna-la mais clara e menos abstrata, bem como desenvolver no aluno aptidões para que ele seja capaz de apresentar um comportamento mais criativo e empreendedor. Contudo para tornar isso possível deve ser desenvolvida condições de ensino que permitam dar mais ênfase ao entendimento de conceitos e regras sempre tendo em vista relaciona-los com suas aplicações. Também se busca dar mais ênfase à resolução de questões ligadas ao cálculo, relacionando-as a situações do cotidiano, incentivando o trabalho junto a disciplina com o auxílio de softwares computacionais, desenvolvendo a capacidade de auto-aprendizagem e também promovendo uma melhor integração com a realidade atual, através do trabalho com os softwares.

2. ALGUMAS APLICAÇÕES DO MAPLE® NO CÁLCULO

Tendo em vista sempre proporcionar ao aluno de graduação um melhor aproveitamento em seus conteúdos, isto é, facilitar a compreensão aumentando assim o seu desempenho, escolhe-se um conteúdo do cálculo para ilustrar que os softwares computacionais são de grande importância.

A integral é um operador aplicado sobre uma diferencial, com o objetivo de recuperar a função que foi diferenciada ou derivada. A operação matemática que esse operador executa chama-se integração. O objetivo de uma integração é obter um número ou uma relação explícita entre variáveis.

O assunto escolhido é de grande utilidade prática, porém os graduandos têm enorme dificuldade de entendimento, pois se torna complicado imaginar tantas superfícies gráficas, áreas, volumes sem poder enxergar os sólidos. Diante de tal situação é que se emprega o software no cálculo da integral definida.

A partir do conceito de área, foi possível elaborar e resolver o seguinte problema: Se *f* é uma função contínua em [*a, b*] tal que $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a,b]$, então a área da região compreendida entre o eixo *x* e o gráfico de *f*, para *x* variando em [*a, b*], é dada por:

$$A = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*).\Delta x_i \tag{1}$$

onde, x_i, $i = 0,..., n$ são os pontos de uma partição de [*a, b*] e $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, desde que o limite exista (LEITHOLD, 1982).

A expressão representada na equação (2) é chamada integral definida de *a* até *b* da função *f(x)* em relação a variável *x*.

$$\int_a^b f(x)dx \tag{2}$$

Integrais definidas são usadas para calcular, em geral, valores numéricos de áreas, volumes, centróides, comprimentos, etc.

Nesta abordagem far-se-á uma sondagem para mostrar a grande utilidade do software computacional Maple® em relação a integral. Os conteúdos abordados aqui são uma pequena amostra do imenso e vasto auxílio deste programa na disciplina de cálculo. Neste espaço analisam-se as aplicações do Maple® no cálculo de áreas.

Utilizando coordenadas cartesianas, paramétricas e polares, calculam-se comprimento de arcos e área de regiões planas limitadas. O contexto analisado procura facilitar ao estudante a visualização cartesiana, buscando assim um melhor entendimento.

Utilizando-se coordenadas cartesianas, seja *S*, uma região limitada por: *y=f(x)*, as retas *x=a***,** *x=b* e o eixo dos *x*, onde *f* é contínua e não negativa em [*a, b*]. O cálculo da área da região *S*, Figura (1) é dado pela equação (3).

$$A = \int_a^b f(x)\,dx \tag{3}$$

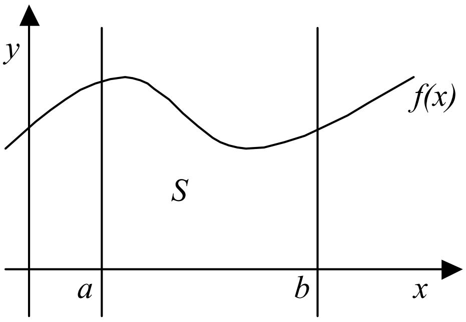

Figura 1: Representação gráfica da região *S*

A prática mostra que a maior dificuldade encontrada neste conteúdo é geralmente procurar os limites de integração das regiões, tornando assim o conteúdo bastante abstrato para grande parte dos universitários. Exemplos simples ilustram tal situação. Seja por exemplo, encontrar a área de região limitada pela curva $y=x^2-9$ e pelo eixo dos x. Neste caso, deve-se primeiro fazer o gráfico, o que pode ser feito com o comando "*plot*", o que resulta na Figura (2).

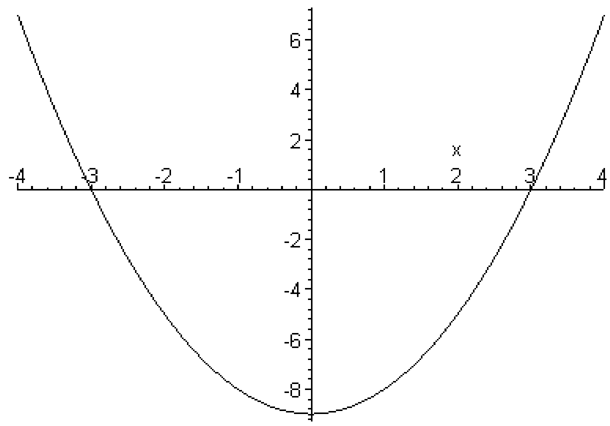

Figura 2: Gráfico da função $y=x^2-9$, com a linha de comando " plot(x^2-9,x=-4..4);"

Agora, percebe-se com o auxílio da figura (2) que a região para o cálculo da área esta abaixo do eixo x e limitada pela curva, mas os pontos –3 e 3 nem sempre são de fácil determinação. Neste caso, pode-se resolver o problema utilizando o comando **"***solve***"** do Maple®, que acha os pontos de interseção da curva com o eixo x ("solve(x^2-9,{x});").

Após a determinação dos limites de integração, o problema torna-se bastante simples, basta resolver a integral com os limites determinados.

Outro caso interessante é o cálculo de áreas delimitadas por curvas. Veja através do exemplo como o software auxilia na resolução do problema. Seja, por exemplo, encontrar a área limitada pelas curvas dadas na forma implícita $y^2=2x$ e $x^2=2y$. A Figura (3) mostra o gráfico das curvas.

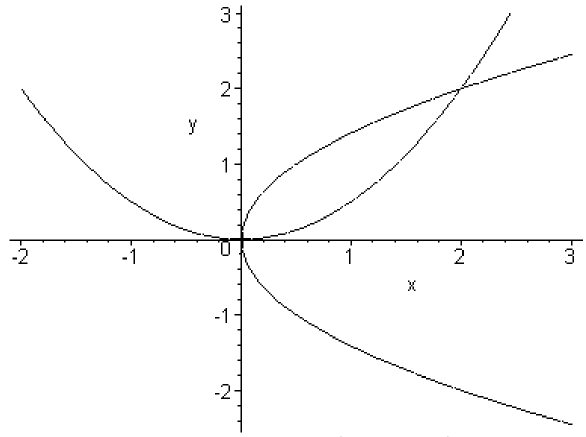

Figura 3: Gráfico das curvas $y^2=2x$ e $x^2=2y$, comando:
implicitplot({y^2=2*x, x^2=2*y},x = -2..3, y=-3..3)

Com a Figura (3) pode-se observar que as curvas se interceptam nos pontos (0,0) e (2,2). Caso estes pontos não sejam de imediata visualização, eles podem ser obtidos através do seguinte comando “solve({y^2=2*x, x^2=2*y},{x,y})”. Encontrados os limites, torna-se bastante acessível e de fácil compreensão a resolução deste exercício. A integral que representa esta área é dada pela equação (4).

$$\int_0^2 (\sqrt{2x} - \frac{x^2}{2})\, dx \tag{4}$$

Caso a região *S* seja representada por equações paramétricas a fórmula para o cálculo de sua área é dada pela integral da equação (5).

$$A = \int_{t_0}^{t_1} y(t)x^{'}(t)\, dt \tag{5}$$

onde $x=x(t)$, $y=y(t)$ e $t \in [t_0, t_1]$. Seja um exemplo do cálculo de área de uma região limitada por curvas escritas por equações paramétricas, onde a região é uma elipse dada pela equação (6).

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} t \end{cases} \tag{6}$$

Nota-se que ao tentar resolver esse exemplo fica bastante abstrato para o aluno visualizar essas regiões, dificultando assim a sua compreensão e tornando a resolução complicada. No entanto se for utilizado o software tem-se uma clara visão da superfície, resultando assim no completo entendimento da questão. Para poder utilizar a fórmula que determina a área desta região é necessário determinar os limites de integração t_0 e t_1, utilizando as equações paramétricas da curva. Construindo o gráfico com a ajuda do Maple®, tem-se a Figura (4).

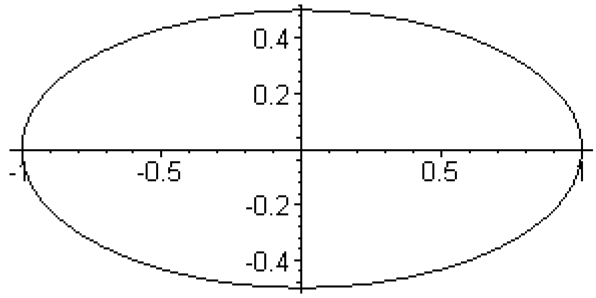

Figura 4: Gráfico da elipse definida pela equação (6), comando:
plot([cos(t),(1/2)*sin(t),t=0..2*Pi]);

Logo se pode observar no gráfico acima que esta curva apresenta simetria em relação aos eixos. Sendo assim, é necessário calcular apenas a região que está no primeiro quadrante, isto é, t variando de 0 a $\pi/2$. Depois de se encontrar os limites de integração torna-se bastante simples a resolução do problema.

Se o problema for encontrar a área de uma figura descrita em coordenadas polares, deve-se determinar a área delimitada pelas retas $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$ e pela curva $r = f(\theta)$. Neste caso a área da região S é dada pela equação (7).

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta \tag{7}$$

No caso, se a área estiver no interior do círculo $r = 3sen\theta$ e exterior à cardióide $r=1+sen\theta$, para se determinar à solução desse problema, que parece ser bastante complicado, torna-se de simples percepção se utilizarmos o Maple®. A Figura (5) representa o gráfico da região.

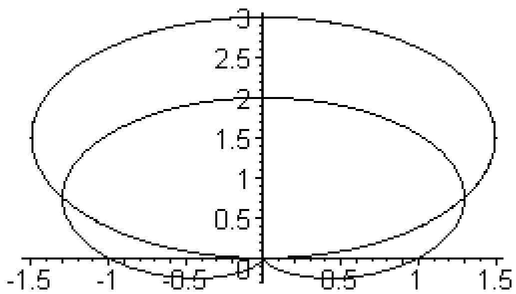

Figura 5: Gráfico da região limitada pelas curvas $r=3sen\theta$ e $r=1+sen\theta$: comando
polarplot({3*sin(theta),1+sin(theta)},theta=0..2*Pi)

Para se calcular os pontos de interseção, resolve-se o sistema de equações $r = 3sen\theta$ e $r=1+sen\theta$, e obtêm-se os pontos $\theta = -\pi/6$ e $\theta = \pi/6$. Caso utilize-se o software, deve-se utilizar a simetria da região, pois o comando "solve" (solve(3*sin(theta)=1+sin(theta),{theta})) fornece apenas a solução no primeiro quadrante. Entretanto, devido à simetria do gráfico em relação ao eixo x, a integral pode ser calculada de 0 a $\pi/6$ e multiplicada por 2.

No cálculo de volume de um sólido, o programa também pode auxiliar, pois é muito útil para encontrar os limites de integração que não é de fácil visualização. Se o sólido estiver definido em coordenadas cartesianas, para o cálculo do volume, pode ser utilizado o processo de integração tripla. Seja *T* uma região qualquer no plano *xyz*, projetando-se a região *T* sobre o plano *xy*, obtém-se uma região plana *R* segundo a equação (8).

$$R = \begin{cases} a \le x \le b \\ f_1(x) \le y \le f_2(x) \end{cases} \tag{8}$$

Se a região *T* é limitada por $z_1 = g_1(x,y)$ e $z_2 = g_2(x,y)$. Então o volume da região *T* é dado pela equação (9).

$$V = \int_a^b \left[\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} dz \right] dy \right] dx \tag{9}$$

Para encontrar o volume do sólido, por exemplo, limitado superiormente por $z = x+2y+1$, inferiormente por $z = -x-2y+2$ e lateralmente pela superfície definida pelo contorno da região *D*, limitada pelas curvas $y = x^2-1$ e $y = 2x^2-2$. Inicialmente utiliza-se, novamente o comando "solve" para determinar os limites de integração ("solve(x^2-9,{x});"). Assim acham-se os valores de *x,* que variam de -1 a 1. A variação de *y* é definida pela desigualdade, $x^2-1 \le y \le 2x^2-2$. Visualizam-se essas duas curvas através da Figura (6). A variação de *z* é de $-x-2y+2$ a $x+2y+1$.

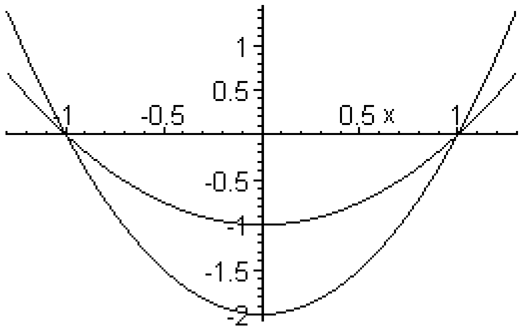

Figura 6: Gráfico da região limitada pelas curvas $y = x^2-1$ e $y = 2x^2-2$. Comando plot({x^2-1,2*x^2-2},x=-1..1)

Logo, o volume do sólido é dado pela integral conforme equação (10).

$$V = \int_{-1}^{1} \left[\int_{x^2-1}^{2x^2-2} \left[\int_{-x-2y+2}^{x+2y+1} dz \right] dy \right] dx \tag{10}$$

3. CONCLUSÕES

O problema das reprovações nas disciplinas de cálculo indica que é necessária uma urgente renovação da atual metodologia de ensino. Por esses motivos e também pelo demasiado crescimento na área tecnológica que estamos vivendo tem-se a necessidade de se habituar às novas metodologias de ensino-aprendizagem e seu uso correto.

A tecnologia computacional tem dado mostras que pode trazer benefícios ao ensino-aprendizado de vários conteúdos. Sobre o assunto, existe no mercado, vasta literatura e material disponível que podem ser aproveitados para uma variedade de práticas pedagógicas que aumentam o nível de qualidade do conhecimento dos alunos durante a vida acadêmica. É importante ressaltar que este artigo não buscou em nenhum momento substituir a figura do professor, mas mostrar que a seu dispor existe material, softwares, por exemplo, para dar suporte e melhorar o alcance de objetivos para efetiva compreensão do cálculo e de suas aplicações.

Em relação a esta forma de trabalhar relacionando os conteúdos vistos nas aulas de cálculo e o uso de um determinado programa computacional, percebeu-se a possibilidade de promover o desenvolvimento da habilidade de interpretar e visualizar fenômenos relativos à disciplina. Também serviu para analisar, com maior riqueza de detalhes, todas as variáveis envolvidas nos problemas, relacionando-as convenientemente para, finalmente, propor uma solução do problema.

Destaca-se também como benefícios decorrentes da utilização de recursos computacionais, a possibilidade de: (a) explorar problemas mais complexos, tornando-os de simples compreensão e fácil visualização; (b) explorar com mais profundidade alguns aspectos geométricos do cálculo; (c) construção do conceito pelo aluno; (d) uma forma de relação com a disciplina tornando-a mais agradável e de melhor compreensão e (e) uma forma cooperativa de aprendizagem.

Através desta busca por novas formas diversificada de ensino, utilizando recursos tecnológicos que estão inseridos na atual sociedade e que não param de crescer, foi possível criar condições programadas que permitiram: (a) uma participação mais efetiva dos alunos na disciplina; (b) melhores resultados por parte dos discentes na disciplina; (c) maior interação com os conteúdos matemáticos básicos e uma grande melhora na compreensão de suas aplicações; (d) sensível melhora no alcance de objetivos básicos para efetiva compreensão do cálculo e de suas aplicações; (e) melhor desempenho nas disciplinas subseqüentes; (f) melhora na forma de expressar-se, no que diz respeito à linguagem utilizada para interpretar e descrever o raciocínio empregado em cada caso e na análise dos resultados obtidos.

4. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABEL, M.L., BRASELTON, J.P. **Maple by example**. New York: Academic Press, 1994.

ALVES, G. L. M. O Maple na modernização do Cálculo. **Anais do XXV Congresso Brasileiro de Engenharia**. V. 2, Salvador: Escola Politécnica da UFBA, 12 a 15 de outubro de 1997.

ÁVILA, G. O Ensino da Matemática. **RPM**: **Revista do Professor de Matemática**. Sociedade Brasileira de Matemática, São Paulo, 1993.

HUGHES-HALLETT, D., GLEASON, A. M., et. al. **Calculo.** Rio de Janeiro: LTC Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., 1997.

LEITHOLD, L. **O cálculo com geometria analítica**. São Paulo: Editora Harper & Row do Brasil Ltda.,1982.

MARLIN, J. A., KIM, H., **Calculus I with Maple V**. Disponível em: http://www.mste.uiuc.edu/murphy/papers/CalcReformPaper.html (em 12/08/1999).

MURPHY, L. D., **Computer Algebra Systems in Calculus Reform**. Disponível em: http://www.mste.uiuc.edu/murphy/papers/CalcReformPaper.html (em 20/09/1999).

NASCIMENTO, J. L. e NASSER, L. A reprovação em Cálculo I: investigações de Causas. **Anais do XXV Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia.** V.2. Salvador: Escola Politécnica da UFBA, 1997.

PALIS, G. L. R. Computadores em Cálculo. Uma alternativa que não se justifica por si mesma. **Temas & Debates.** Sociedade Brasileira de Educação Matemática, São Paulo, Ano VII, n. 6, p. 22-37, 1995.

REDFERN, D. **The Maple handbook: Maple V Release 4**. New York: Springer-Verlag, 1996.

MULTI-WAYS OF TEACHING IN SEVERAL VARIABLES CALCULUS CLASSES

Abstract: *Utilizing software for leading to up to date studies on Several Variables Calculus represents a proposal of new methods of teaching Integrated with alternatives of computational strategies for studying concepts of infinitesimal calculus in graduation level, especially for engineering. Basic concepts can be presented by algebra symbols as much as by (colored) graphs and numbers. Possibility of using multiple representations can be seen as a form of improving learning quality and to adapt graduate math programs to the use of algebraic software. By this way of thought it is possible, with the help of some software, to achieve fast visualization and a less abstract and better understanding of several calculus concepts. The use of computer technology has brought benefits to the teaching-learning of several mathematical contents. It is important to emphasize that the present article doesn't simply analyzes the use of commands of some programs, but analyzes the studies of some concepts through the use of math software. Besides, the adopted approach aims to improve of learning in calculus classes. Maple software will be used for solving problems that utilizes infinitesimal calculus. It is understood that this can represents an effective method of learning.*

Key-words: *Multi-ways of teaching, Teaching-learning, Software Maple®, Calculus.*