



## UMA SUGESTÃO DE USO DE PLANILHAS ELETRÔNICAS NO ENSINO DE TRANSFORMAÇÕES LINEARES

**Nair Cristina Margarido Brondino** – brondino@fc.unesp.br  
UNESP – Faculdade de Ciências – Departamento de Matemática  
Av. Luiz Edmundo Carrijo Coube, 14-01  
CEP 17033-360 – Bauru - SP

**Odney Carlos Brondino** – ocbondino@ig.com.br  
UNIP – Universidade Paulista  
Rodovia Marechal Rondon, km 335  
CEP 17048-290 – Bauru - SP

***Resumo:** Este trabalho apresenta uma atividade exploratória que visa a utilizar as potencialidades de uma planilha eletrônica no ensino das Transformações Lineares Planas. Em virtude da facilidade de interface da planilha com o usuário e de sua disponibilidade, escolheu-se o Microsoft Excel para a elaboração da atividade proposta. A vantagem na utilização de uma planilha eletrônica é a exploração, de maneira simultânea, das representações matricial, numérica e gráfica das Transformações Lineares Planas, o que torna esta ferramenta um grande auxiliar no ensino-aprendizagem de Álgebra Linear.*

***Palavras-chave:** Ensino – aprendizagem, Transformações Lineares, Planilhas Eletrônicas.*

### 1. INTRODUÇÃO

A Álgebra Linear é indispensável à formação básica daqueles que pretendem usar a Matemática em suas áreas de atuação, uma vez que se encontra subjacente à maioria de seus domínios, como nas áreas de Análise e Geometria. Devido a esta característica, é importante que todos aqueles que pretendam trabalhar com as ciências que utilizam a Matemática dominem seus principais conceitos. Neste contexto, a importância da disciplina de Álgebra Linear nos cursos de Exatas, como nas engenharias, está tomando cada vez mais lugar no cenário do ensino-aprendizagem de Matemática.

Em sua pesquisa, Nomura (2008) entrevistou professores de um curso de Engenharia Elétrica, com vistas a traçar a importância da Álgebra Linear em sua área de atuação. Nas entrevistas realizadas, além das relações entre os conteúdos da Álgebra Linear com disciplinas específicas do curso, como Processamento de Sinais e Teoria Eletromagnética, também apareceram a preocupação em proporcionar ao futuro engenheiro uma sólida formação em Matemática e Física e a necessidade de uma formação teórica dos alunos de engenharia, direcionando-os à formação de futuros pesquisadores. Ainda, segundo Nomura (2008), a evolução de *software* e *hardware* promove uma demanda para capacidades cada vez maiores o que vem desencadeando investigações que relatam experiências e necessidades conjuntas de Universidades a respeito de um melhor aproveitamento de disciplinas matemáticas como

Realização:



Organização:





curso de serviço.

De acordo com Oliveira (2002), a importância da Álgebra Linear no ensino superior despertou o interesse de educadores matemáticos franceses e canadenses na década de 90. Segundo a autora, para os pesquisadores franceses, “... *no que diz respeito ao ensino e à aprendizagem, o primeiro curso de Álgebra Linear é geralmente mal sucedido.*” Este fato vem corroborar com aquele reportado por Celestino (2000), o qual apresenta um quadro em que os índices de retenção em Álgebra Linear entre os anos de 1993 e 1997, observado nas três universidades públicas paulistas (UNESP, USP e UNICAMP), ficaram na faixa de 25% a 50%. Segundo Machado (2004), o resultado da pesquisa desenvolvida pelos estudiosos franceses com relação às dificuldades encontradas pelos alunos na aprendizagem da disciplina “*mostrou que a forma abstrata e axiomática utilizada para tratar das primeiras noções da Álgebra Linear, como espaços vetoriais, base, etc., causa no aluno iniciante uma sensação de fracasso, impedindo que avance em sua aprendizagem.*”

Soma-se a este problema o fato de que grande parte dos alunos, incluindo muitos daqueles que têm êxito ao final do curso, faz mero uso dos mecanismos e técnicas associados à resolução de problemas típicos de Álgebra Linear, sem compreender os conceitos teóricos envolvidos, o que, segundo Oliveira (2002), consiste em uma das principais preocupações de muitos pesquisadores em relação ao ensino-aprendizagem da Álgebra Linear.

Dentre os trabalhos publicados na área de ensino-aprendizagem da disciplina, muitos têm foco na teoria sobre as Transformações Lineares (OLIVEIRA, 2002; KARRER, 2006; KARRER, 2009). A explicação para isso repousa no fato de que o estudo das transformações lineares assume um papel importante dentro da teoria da Álgebra Linear, tendo em vista as suas aplicações nas diversas áreas de conhecimento, inclusive na engenharia.

Dentro de um cenário em que a importância das disciplinas básicas na formação teórica do engenheiro torna-se de grande importância, Nomura (2008) coloca que “[...] *Conceitos se formam, metodologias são investigadas e novas formas de apresentar as disciplinas básicas tornam-se fatores imprescindíveis na formação de um profissional que deverá responder às mais diversas exigências.*” Diante disso, alguns autores têm procurado analisar a potencialidade do uso de ferramentas computacionais no ensino da Álgebra Linear. Dentre estes, pode-se citar o trabalho de Karrer (2006), que usou o software *Cabri-Géomètre* para propor atividades que se focaram nas conversões de matrizes e leis algébricas das transformações em gráficos. A autora apresenta em sua pesquisa os resultados de um experimento realizado com alunos de um curso de Computação em que trabalha os vários tipos de registros e sua conversão, além de tratar a transformação composta e a sua não comutatividade. Rosa et. al. (2009), por sua vez, exploraram as potencialidades do software Winplot para propor uma atividade visando à representação geométrica das transformações lineares planas. O trabalho de Rosa et. al. (2009) explorou a lei algébrica das transformações e sua representação gráfica. Parmegiani (2011) utilizou o software Matlab para explorar as transformações lineares planas em cursos de Engenharia. Em seu trabalho, a autora propôs uma atividade para os alunos de engenharia, onde os recursos do software Matlab foram utilizados para explorar as transformações lineares planas a partir da matriz da transformação e sua representação gráfica.

Neste contexto, o presente trabalho explora as potencialidades de uma planilha eletrônica, no caso o Microsoft Excel, para trabalhar as transformações lineares planas, fazendo uso da matriz de transformação linear.

Como este texto apresenta como foco a apresentação de uma atividade para explorar as Transformações Lineares Planas e a teoria acerca do assunto é bem conhecida, está será



omitida neste trabalho. Maiores detalhes podem ser encontrados em livros de Álgebra Linear, como LIPSCHUTZ (1994), CALLIOLI (1978), BOLDRINI (1980), POOLE (2004), NICHOLSON (2006), entre outros.

Desta forma, este trabalho divide-se em mais três seções, além desta introdução. Na seção 2, é apresentada a justificativa da escolha de uma planilha eletrônica para a atividade. A seção 3 apresenta a proposta de atividade, em conjunto com sugestões de tópicos que podem ser abordados. A quarta e última seção apresenta as considerações finais.

## 2. JUSTIFICATIVA

Na visão de Duval apud Karrer (2009), “a aprendizagem de um objeto matemático consiste no desenvolvimento de progressivas coordenações entre vários sistemas de representação semiótica. Como exemplos de sistemas semióticos, destacam-se os sistemas algébricos, os numéricos e os gráficos”. Na teoria de Duval, que tem sido bem aceita pelos pesquisadores em educação matemática segundo Flores (2006),

*“[...] não haverá compreensão possível sem o recurso às representações semióticas. Não obstante, as representações no domínio da matemática são consideráveis, já que os objetos matemáticos, não sendo acessíveis pela percepção, só podem sê-lo por sua representação, lembrando que um mesmo objeto matemático poderá ter representações diferentes, dependendo da necessidade e do uso. Para o caso do objeto matemático, a função, por exemplo, pode-se ter um registro de representação lingüística (função linear), um registro de representação simbólica ( $y = x$  ou  $f(x) = x$ ), ou ainda, um registro de representação gráfica (o desenho do gráfico da função).*

*A contribuição de Duval para o processo de ensino/aprendizagem em matemática está em apontar a restrição de se usar um único registro semiótico para representar um mesmo objeto matemático. [...] Logo, para não confundir o objeto e o conteúdo de sua representação é necessário dispor de, ao menos, duas representações, de modo que estas duas devam ser percebidas como representando o mesmo objeto. Além disso, é preciso que o estudante seja capaz de converter, de transitar entre uma e outra representação...”.(Flores 2006, p. 03)*

No tocante às transformações lineares, as representações mais comuns observadas nos livros de Álgebra Linear são:

- a. Representação simbólico-algébrica. Exemplo,  $T(x, y) = (-x, -y)$ .
- b. Representação matricial. Exemplo,  $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .
- c. Representação de n-uplas. Exemplo,  $T(1,2) = (3,4)$
- d. Representação gráfica.
- e. Representação por um sistema de equações lineares, como, por exemplo:



Sejam  $a, b, c, d$  escalares. Denotamos por  $A$  a transformação que associa a cada vetor  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  um vetor  $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  onde  $\begin{cases} x = ax' + by' \\ y = cx' + dy' \end{cases}$ .

Segundo Karrer (2006), as representações anteriores estão associadas a um tipo de registro. Por exemplo, a representação dada no item  $a$  constitui-se em um registro simbólico, enquanto a representação dada no item  $c$  consiste em um registro numérico.

Em seu trabalho, Karrer (2006) analisou os tipos de registros mais frequentes nos quatro livros de Álgebra Linear aplicados aos cursos da área computacional de doze instituições nacionais de ensino superior. Nesta investigação, a autora observou que os registros gráfico e tabular são os menos utilizados pelos livros no ensino das transformações lineares. A autora também observou que quando tais obras mencionam o uso de *software*, estes não são efetivamente integrados no desenvolvimento do conteúdo, sendo indicados preferencialmente como recursos em exercícios complementares.

De acordo com Celestino (2000), muitas pesquisas desenvolvidas sobre a aplicação de tecnologia da informação no ensino-aprendizagem de matemática mostram que muitas vezes o próprio sistema tecnológico (*hardware e software*) torna-se um obstáculo para o aprendizado, pois muitas vezes a própria tecnologia utilizada pode distrair a atenção dos estudantes. Desta forma, a escolha do Microsoft Excel para a elaboração da atividade proposta neste trabalho deu-se em virtude da facilidade de interface da planilha com o usuário e de sua disponibilidade, além da possibilidade de exibição de dados tabulares, gráficos e matrizes de transformação de maneira simultânea.

Além disso, diferentemente dos trabalhos que utilizaram recursos computacionais para o ensino das transformações lineares, mencionados anteriormente, a dinâmica da planilha permite ao usuário a manipulação dos elementos da matriz de transformação, de forma concomitante à alteração da forma geométrica e das coordenadas dos pontos após a aplicação. Essa possibilidade permite ao aluno o acesso a vários tipos de registro de maneira simultânea.

### 3. A ATIVIDADE

A figura escolhida no desenvolvimento da atividade foi a casinha utilizada no livro de Foley et al. (1990), que é apresentada na figura 1. Os valores que aparecem acima dos vértices da figura correspondem às coordenadas  $x$  e  $y$  de cada vértice, respectivamente, e que estão dispostas nas colunas da matriz  $B$ , que também é mostrada na figura 1.

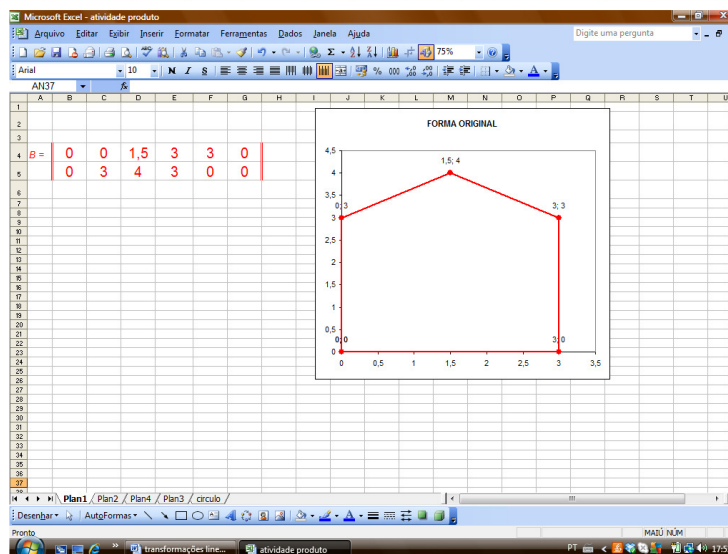


Figura 1 – Representação geométrica da figura plana utilizada.

Para elaborar a atividade apresentada neste trabalho, a matriz  $T$  de ordem  $2 \times 2$  foi adicionada à planilha. A matriz  $T$  representa a matriz de transformação linear. O resultado da multiplicação da matriz  $T$  pela matriz de coeficientes  $B$  é apresentado no gráfico que aparece na figura 2. Como a matriz  $T$  mostrada na figura 2 é a Matriz Identidade, a figura plana permanece inalterada. Vale observar que, em uma única tela, é possível a visualização simultânea da matriz de transformação, das coordenadas dos vértices da figura original (Domínio), das coordenadas dos vértices da figura transformada (Imagem) e da representação gráfica da transformação. A utilização da planilha também permite usar o recurso das cores, onde a cor que identifica a matriz aparece na figura gerada por esta matriz.

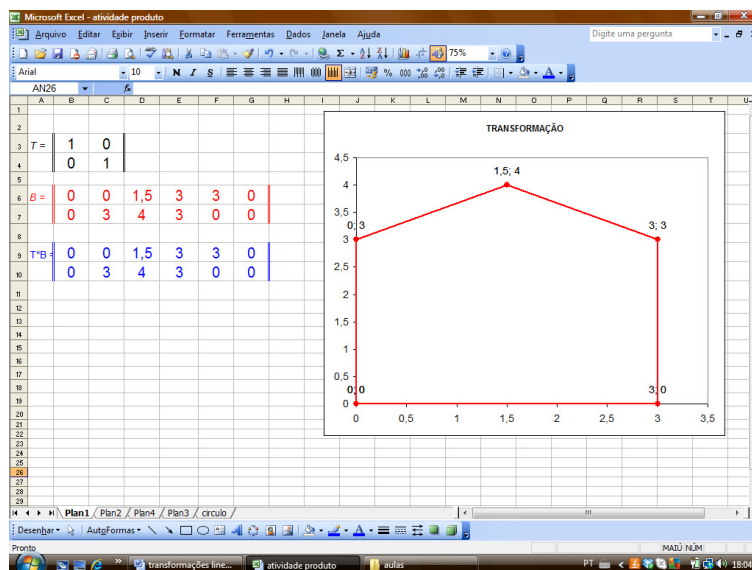


Figura 2 – Esboço da figura resultante do produto da matriz A pela matriz B.



Ao variar os elementos da matriz  $T$ , sua aplicação à matriz  $B$  provoca uma deformação na figura original. Esta deformação pode ser verificada para vários tipos de transformação. Por exemplo, quando a matriz  $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  é aplicada à matriz  $B$ , observa-se uma dilatação horizontal de fator 2, que pode ser observada na cor azul no gráfico da figura 3. Observe que a figura original também aparece no gráfico da figura 3, sendo que a sobreposição proporciona ao aluno uma visão mais detalhada do impacto da transformação aplicada. Atenção pode ser chamada para o fato de que os valores das abscissas dos vértices da figura dobraram, enquanto que as ordenadas permaneceram inalteradas.

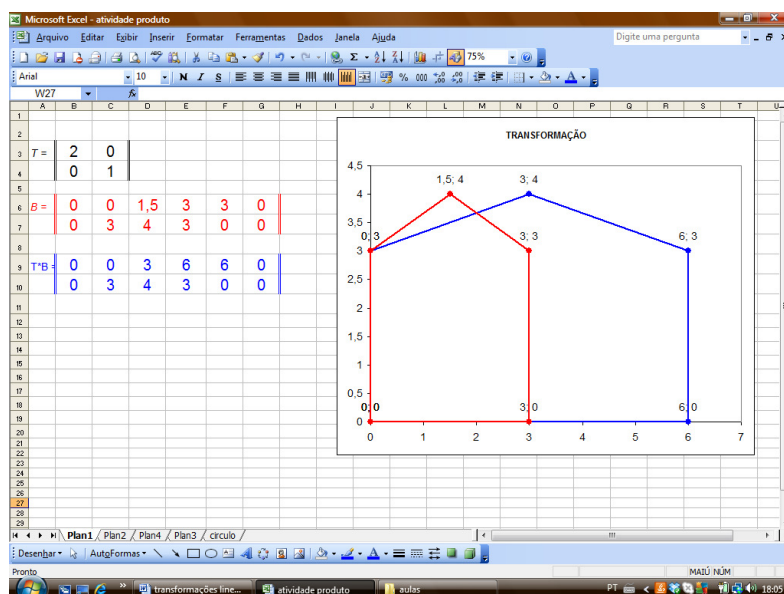


Figura 3 – Resultado da aplicação da matriz  $T$  à matriz  $B$ .

Além das dilatações, a rotação também pode ser explorada através da mesma ideia. Para analisar o efeito da rotação com relação à origem, o aluno pode escolher o ângulo de rotação desejado. A matriz  $T$  agora representa a matriz de rotação, que é dada por  $T = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ . Ao variar o ângulo  $\theta$ , os elementos da matriz  $T$  são automaticamente atualizados pela planilha e o impacto de sua aplicação à matriz  $B$  também pode ser visualizado, conforme figura 4, na qual um ângulo de  $\pi/4$  radianos foi utilizado.

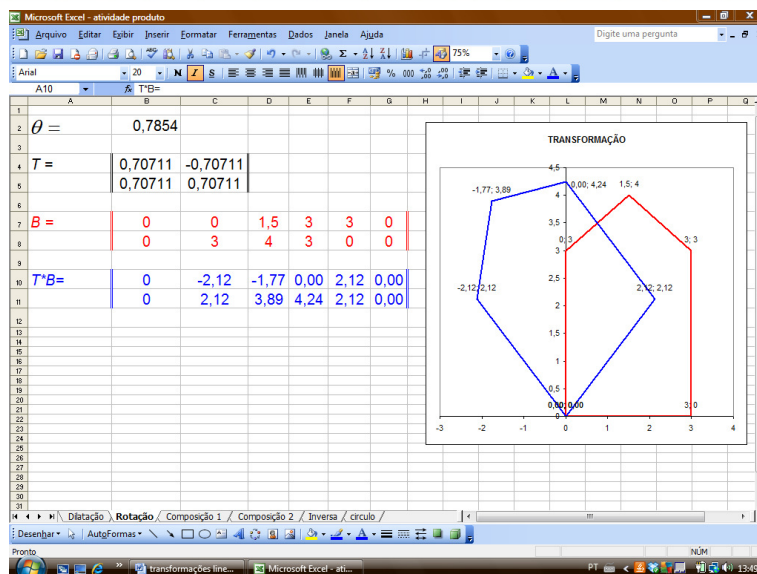


Figura 4 – Resultado de uma rotação de um ângulo de  $\pi/4$  radianos com relação à origem à aplicada à figura original.

Para tratar a composição de transformações lineares, uma nova matriz denominada de  $T1$  será adicionada à planilha. A matriz da transformação resultante será dada pelo produto das matrizes  $T$  e  $T1$ , o qual será então aplicado à matriz  $B$  das coordenadas da figura original. O resultado da transformação resultante após uma rotação de um ângulo de  $\pi/4$  radianos com relação à origem, seguida por uma dilatação de fator 3 na direção vertical é apresentado na figura 5.

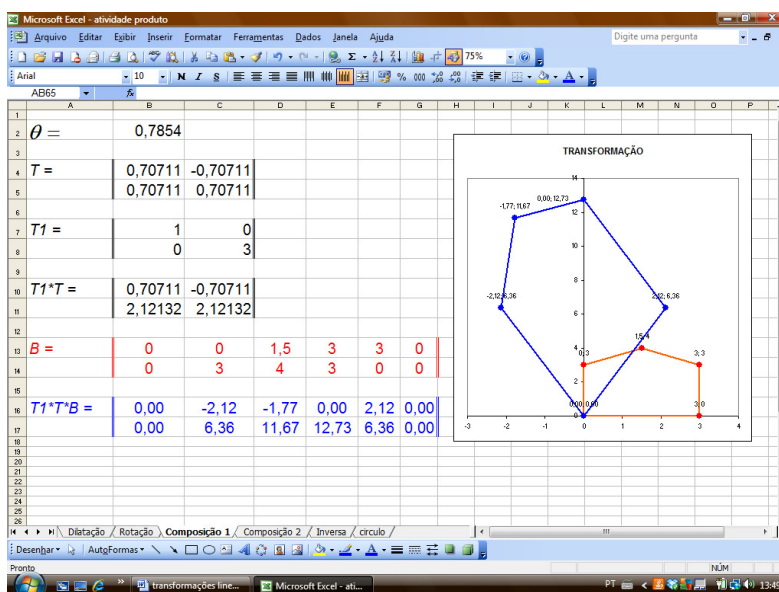


Figura 5 – Resultado da aplicação de uma dilatação vertical de fator 3, seguida por uma rotação de um ângulo de  $\pi/4$  radianos à figura original.



A noção de que a ordem com que as transformações são aplicadas interfere no resultado pode ser trabalhada a partir das mesmas matrizes utilizadas na composição anterior, porém, mudando a ordem que as matrizes são multiplicadas. Desta forma, a aplicação da matriz  $T1*T$  à matriz de coordenadas  $B$  pode ser visualizada na figura 6 e comparada com aquela que foi obtida na transformação apresentada na figura 5. Atenção pode ser chamada para as coordenadas da matriz resultante nos dois casos.

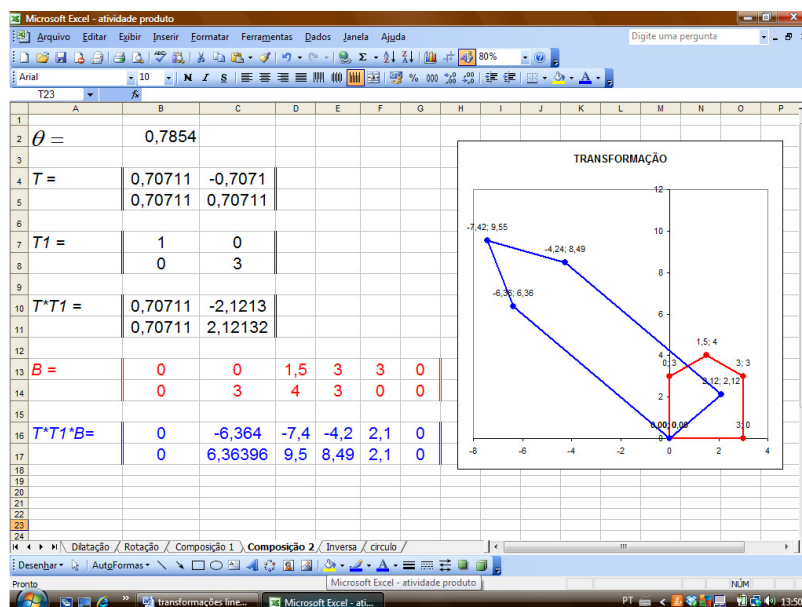


Figura 6 – Resultado da aplicação de uma rotação de um ângulo de  $\pi/4$  radianos à figura original, seguida por uma dilatação vertical de fator 3.

Para explorar a transformação inversa, pode-se usar um recurso do próprio software, onde a inversa da matriz de transformação é obtida. Esta matriz inversa será então aplicada à matriz que contém as imagens da transformação  $T1*T$ , resultando na casinha que aparece na cor verde na figura 7. Neste momento, pode-se chamar a atenção do aluno para o fato de que a aplicação da matriz inversa às imagens anula a transformação aplicada a princípio, uma vez que a figura transformada coincide com a figura original.



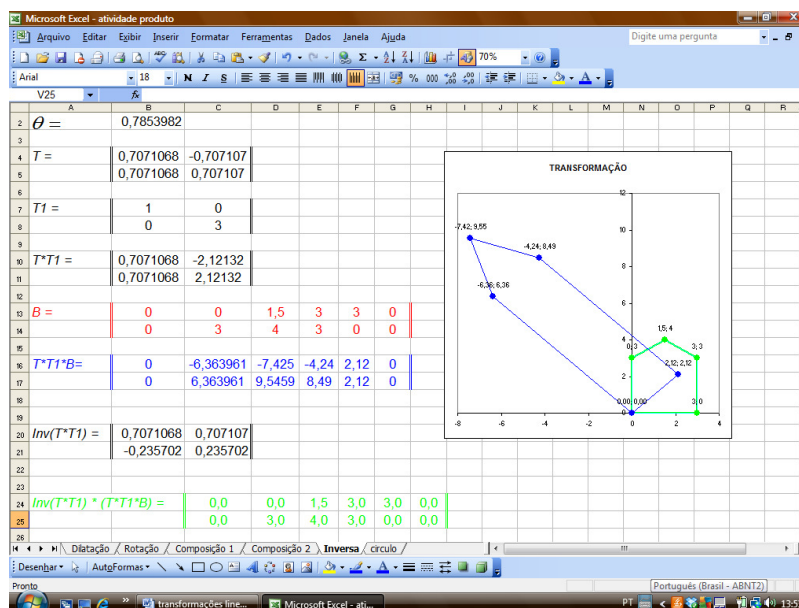


Figura 7 – Resultado da aplicação da transformação inversa.

#### 4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A disciplina de Álgebra Linear está entre as que mais reprovam nos anos iniciais dos cursos na área de Exatas e, por isso, tem despertado o interesse de vários pesquisadores na área de ensino-aprendizagem de Matemática. A preocupação dos pesquisadores é devida, em parte, ao fato de que os seus conceitos são utilizados em outras disciplinas, não só as do ciclo básico, mas também as específicas. Pesquisas revelam sua importância na formação básica do estudante de engenharia, não só pelo fato de esta se relacionar com as disciplinas específicas, mas também pela preocupação com a formação do futuro profissional, que precisa estar preparado para um mercado de trabalho cada vez mais exigente.

Dentro de um cenário em que a importância das disciplinas básicas na formação teórica do engenheiro torna-se de grande importância, novas formas de apresentar estas disciplinas, com vistas a atrair o interesse dos alunos e promover uma apropriação mais satisfatória dos conteúdos ministrados torna-se premente.

Em virtude do número de aplicações existentes nos mais diversos campos, inclusive na engenharia, as Transformações Lineares têm destaque entre os conteúdos lecionados na disciplina de Álgebra Linear. Devido ao fato de que as transformações lineares podem ser representadas de várias maneiras (algébrica, gráfica, numérica, matricial), várias são as possibilidades de exploração deste conceito no ensino deste conteúdo, inclusive com o auxílio de ferramentas computacionais. Nesta direção, alguns pesquisadores têm aplicado as tecnologias informáticas como ferramenta de apoio ao aprendizado desta teoria.

Tendo em vista esta problemática, este trabalho apresentou uma proposta de aplicação do Microsoft Excel na exploração das Transformações Lineares Planas. A escolha deste software deu-se por várias razões, como a facilidade de interface da planilha com o usuário e sua disponibilidade, além da possibilidade de exibição de dados tabulares, gráficos e matrizes de transformação de maneira simultânea, permitindo a exploração de várias representações ao mesmo tempo. As sugestões de atividades apresentadas neste texto não se limitam a todo o



conteúdo que pode ser explorado, uma vez que não esgotam outras transformações interessantes para alunos de um curso de engenharia, como o cisalhamento e a rotação que não é feita com relação à origem.

### ***Agradecimentos***

Os autores agradecem à FUNDUNESP – FUNDAÇÃO PARA O DESENVOLVIMENTO DA UNESP, pelo apoio financeiro concedido e também à UNIP – Campus Bauru.

### **REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

BOLDRINI, J. L. Álgebra linear. São Paulo: Harper e Row do Brasil, 1980

CALLIOLI, C. A. et alii. Álgebra linear e aplicações. São Paulo: Atual, 1978.

CELESTINO, M. R. PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA. Ensino-Aprendizagem da Álgebra Linear: as pesquisas brasileiras na década de 90, 2000, 114 p. Dissertação (Mestrado). Disponível em:

<[http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/marcos\\_roberto\\_celestino.pdf](http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/marcos_roberto_celestino.pdf)> - Acesso em: 15 mai. 2012.

FLORES, C. R. Registros de representação semiótica em matemática: história, epistemologia, aprendizagem. In: BOLEMA, v. 19, n. 26. Disponível em:

<<http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/1853/1614>> - Acesso em: 16 mai. 2012.

FOLEY, J.D. et al. *Computer Graphics: Principles and Practice*. Local: Addison-Wesley Publishing Company, 1990.

KARRER, M. (2009). Transformações Lineares: A problemática das tarefas que têm o Gráfico como registro de partida. In: IX ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática. Disponível em:

<[http://www.sbem.com.br/files/ix\\_enem/Html/comunicacaoCientifica.html](http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Html/comunicacaoCientifica.html)> - Acesso em: 14 mai. 2012.

KARRER, M. Articulação entre Álgebra Linear e Geometria – Um Estudo sobre as Transformações Lineares na Perspectiva dos Registros de Representação Semiótica, 2006, 371 p. Tese (Doutorado). Disponível em

<[http://www.pucsp.br/pos/edmat/do/tese/monica\\_karrer.pdf](http://www.pucsp.br/pos/edmat/do/tese/monica_karrer.pdf)> - Acesso em: 16 mai. 2012.

LIPSCHUTZ, S. Álgebra Linear, 1994, 647 p. Makron Books.

MACHADO, S. D. A. (2004) Educação Matemática no Ensino Superior. VIII ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática, 2004. Disponível em:

<<http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/13/MR02.pdf>> - Acesso em: 09 mai. 2012.

NICHOLSON, W.K. Álgebra Linear, 2a. edição, McGrawHill, 2006.

NOMURA N. M. (2008). PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA Como Sobrevivem as Diferentes Noções de Álgebra Linear nos Cursos de Engenharia Elétrica e nas Instituições, 2008, 138 p. Dissertação (Mestrado). Disponível em:

<[http://www4.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/joelma\\_nomura.pdf](http://www4.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/joelma_nomura.pdf)> - Acesso em: 16 mai. 2012.



OLIVEIRA, V. C. A. (2002). INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS DA UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”. Sobre a Produção de Significados para a Noção de Transformação Linear em Álgebra Linear, 2002, 181 p. Disponível em:

<[http://www.athena.biblioteca.unesp.br/exlibris/bd/brc/33004137031P7/2002/oliveira\\_vca\\_me\\_rcla.pdf](http://www.athena.biblioteca.unesp.br/exlibris/bd/brc/33004137031P7/2002/oliveira_vca_me_rcla.pdf)> - Acesso em: 09 mai. 2012.

PARMEGIANI, R. (2011). Explorando as Transformações Lineares no Plano com o Uso do Matlab. Anais do XXXIX COBENGE - Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia. CD-ROM.

POOLE, D. Álgebra Linear, Pineira Thomson Learning, 2004.

ROSA, O. S.; GOULART, I.; CASANOVA, L.; LEHMANN, M. S. Explorando as transformações lineares no plano, através do software WINPLOT. **Revista TECCEN**, v. 2, n. 2. 2009. Disponível em:

<[http://www.uss.br/revistateccen/revista\\_informativo4/ArtigoWinplotROSA.pdf](http://www.uss.br/revistateccen/revista_informativo4/ArtigoWinplotROSA.pdf)> - Acesso em: 09 mai. 2012.

## **TEACHING LINEAR TRANSFORMATIONS USING A SPREADSHEET**

**Abstract:** *The goal of this paper is to present an exploratory activity which objective is to use the characteristics of a spreadsheet to teach the Linear Transformations in the plane. The Microsoft Excel was chosen due its interface with the user and its availability. The main advantage in use a spreadsheet is the simultaneous exploration of the matricial, numerical and graphical aspects of Linear Transformations in the plane.*

**Key-words:** *Linear transformations, Teaching-learning, Spreadsheets.*