XL CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA. COBENGE 2012
03 a 06 de Setembro
Belém - PA

FUNÇÕES ANALÍTICAS E TÓPICOS CORRELATOS EM UM CURSO DE ENGENHARIA: UM ASSUNTO ESQUECIDO

Alexandre Kawano – alexandre.kawano@poli.usp.br
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, PMR
Av. Prof. Mello Moraes 2231
05508-900 São Paulo - SP
Luís Flavio Soares Nunes – luis.flavio@usp.br
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, PMR
Av. Prof. Mello Moraes 2231
05508-900 São Paulo - SP

Resumo: *Neste artigo, apontamos uma lacuna na formação matemática de nossos Engenheiros. De modo geral, nos cursos de Engenharia são abordados tópicos clássicos do Cálculo e da Álgebra Linear, mas não o das funções complexas de uma variável, e nem o de funções analíticas. Entretanto, a ideia de funções analíticas, que podem ser determinadas completamente de forma unívoca conhecendo-se apenas seu comportamento em um conjunto muito pequeno, é crucial em vários momentos em disciplinas mais aplicadas como o de Sistemas Dinâmicos ou de Resistência dos Materiais. Aproveitamos o caso das funções analíticas para ilustrar outras classes de funções que apresentam a mesma propriedade. Procuramos fazer uma contribuição à discussão sobre ementas de Matemática para as ciências básicas na Engenharia.*

Palavras-chave: *Educação em Engenharia, Equações básicas, Funções quase-periódicas*

1. INTRODUÇÃO

Na Escola Politécnica da Universidade de São Paulo está atualmente em discussão a mudança da estrutura curricular da grade da Graduação. Em particular, a mudança tem por objetivo reduzir o número de créditos em disciplinas, uma maior flexibilização da grade curricular, e o fortalecimento das disciplinas básicas (como os cursos de Matemática), com o objetivo, entre outros, de permitir o aluno estudar em casa e se dedicar a outras atividades extra-curriculares. Na tentativa de flexibilizar o currículo, poderíamos sugerir a inclusão de funções analíticas, que como o aluno observará, é uma disciplina de grande importância em disciplinas mais aplicadas, como Sistemas Dinâmicos ou Resistência dos Materiais.

Por outro lado, de uma forma ou de outra, na prática da Engenharia, é importante a verificação da acuracidade de um modelo, ou então a extração de um conjunto de parâmetros de um sistema físico. Por essa perspectiva, a possibilidade de se determinar uma função univocamente em todo o seu domínio a partir da informação de seu comportamento em um pequeno subconjunto onde ela está definida tem grande importância para a Engenharia. Esse é o caso das funções analíticas reais ou complexas.

A propriedade da determinação unívoca, ou propriedade da extensão analítica, a partir de relativamente pouca informação sobre a função leva a uma outra que é usada crucialmente nos cursos de Sistemas Dinâmicos, que é a manipulação dos diagramas de blocos. De fato, a extensão analítica leva ao fato que o conjunto das funções analíticas definidas em um conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$, exibirem a seguinte propriedade: $fg \equiv 0 \ \Rightarrow f \equiv 0 \ ou \ g \equiv 0,$ que é uma propriedade gozada pelos números reais. Assim, diagramas de blocos, que representam transformadas de Laplace (e que são funções analíticas para condições bem gerais, facilmente satisfeitas na Engenharia) são passíveis das mesmas manipulações comuns aos números reais.

A possibilidade de se determinar uma função toda por todo o seu domínio não é propriedade exclusiva de funções analíticas (em todo seu domínio). Ela vale em situações em que as funções são bem mais irregulares, como é o caso de funções quase-periódicas, como será ilustrado no trabalho. É claro que se a função for periódica, então a informação da função por um intervalo de tempo igual ou superior ao seu período determina-a completamente, que é o caso das séries de Fourier.

O problema é que nem o assunto das funções analíticas e nem outros correlacionados e igualmente importantes não são vistos na grande maioria das Escolas de Engenharia no Brasil. Por meio deste trabalho, procuraremos lançar alguma luz sobre o tópico, com o objetivo de chamar a atenção para uma lacuna na formação de nossos Engenheiros. Exporemos alguns exemplos e encerraremos o trabalho com uma aplicação das ideias na identificação de fontes de ruído em vigas.

2. FUNÇÕES E EXTENSÕES ANALÍTICAS

Por definição, uma função $f(z)$ é analítica em um domínio D se $f(z)$ é definida e diferenciável em todos os pontos de D (vide (KNOPP, 1996)). A teoria das funções analíticas se originou no século XIX, principalmente devido aos trabalhos de A.L. Cauchy, B. Riemann e K. Weierstrass. Existem diferentes abordagens para o conceito de analiticidade. Uma definição, que foi originalmente proposta por Cauchy, e foi consideravelmente desenvolvida por Riemann, baseia-se em uma característica estrutural da função - a existência de uma derivada com respeito à variável complexa, isto é, a sua diferenciabilidade complexa. Esta abordagem está intimamente ligada a ideias geométricas. Outra abordagem, a qual foi desenvolvida sistematicamente por Weierstrass, baseia-se na possibilidade de representar funções por séries de potências.

Como exemplo ilustrativo da teoria, podemos citar o teorema de Liouville, cujo enunciado diz que, se uma função complexa for analítica, definida no conjunto dos números complexos e limitada, então ela é necessariamente constante.

Por outro lado, demonstra-se que, tendo o conhecimento de uma função analítica em um ponto de acumulação, ou ponto limite (por exemplo, se forem conhecidos os valores de f no conjunto $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\}$, então a função está completamente determinada em seu domínio, ou seja, estamos fornecendo, ainda que de forma implícita, a função analítica em todos os pontos em que a mesma pode ser definida. Essa técnica consiste na extensão analítica (ou continuação analítica), que é uma forma para estender o domínio de definição de uma dada função analítica. Uma referência clássica sobre o tema encontra-se em (RUDIN, 1987).

Como exemplo característico, consideremos a função definida por

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^n \ = \ 1 + z + z^2 + z^3 \ldots, \qquad (1)$$

que é, como uma soma de série de potências, analítica em seu disco de convergência, $D = \{z \in C: |z| < 1\}$. Contudo, ela diverge para $|z| > 1$. Assim, seria seguro afirmar que D é o domínio natural para f? Ou poderíamos "continuar" f em um conjunto maior? Para tanto, consideremos a função

$$g(z) \coloneqq \frac{1}{1-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n = \frac{1}{1-i} + \frac{z-i}{(1-i)^2} + \frac{(z-i)^2}{(1-i)^3} + \cdots, \tag{2}$$

que, por sua vez, é também analítica em $E = \{z \in C: |z - i| < \sqrt{2}\}$. Mas temos que

$$f(z) := \ 1 + z + z^2 + z^3 \ldots = \frac{1}{z} \ em\ D, \tag{3}$$

$$g(z) \coloneqq \frac{1}{1-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n = \frac{1}{z} \ em\ E, \tag{4}$$

portanto, $f(z)$ e $g(z)$ coincidem na interseção $D \cap E$. Assim, podemos dizer que $g(z)$ é a continuação analítica de $f(z)$ no domínio $E - D$ (conjunto dos elementos que pertencem a E mas não D), e que essa continuação, como é possível demonstrar, é única.

Essencialmente, a possibilidade de expressarmos uma função analítica por uma série de potências é que dá o caráter de ser determinado através do conhecimento de um conjunto que tem ponto de acumulação: precisamos apenas das derivadas da função em algum ponto!

Recordamos que, dada uma função contínua real de variável real $f: R \supset I \rightarrow R$ é, em geral, possível estendermos o domínio da função de infinitas formas distintas, a fim de preservar sua continuidade. Todavia, se $f: C \supset I \rightarrow C$, for uma função analítica, caso desejemos preservar sua analiticidade, então apenas poderemos estender o domínio de definição da função de uma única maneira, que é a extensão ou continuação analítica.

As extensões analíticas são únicas no seguinte sentido: se Vé conexo e é o domínio tanto de F_1 como de F_2, as duas extensões analíticas de f, então $F_1 = F_2$, em todo ponto. Isto se deve a que a diferença é uma função analítica que se anula num conjunto não vazio U (o domínio de f), e uma função analítica que se anula em um conjunto no vazio deve anular-se em todo seu domínio (supondo que o domínio é conexo) e, portanto, deve ser zero.

2.1 Aplicação das ideias nos cursos de Sistemas Dinâmicos

Em sistemas dinâmicos trabalha-se extensivamente com transformadas de Laplace na construção dos diagramas de blocos. Sabe-se que para condições bastante gerais, que são facilmente satisfeitas nas aplicações da Engenharia, essas transformadas são funções analíticas complexas no espaço da frequência. Essas condições para uma função $f: R \rightarrow R$ são basicamente as de que exista algum $x_0 > 0$ a partir do qual $|f|$ cresça mais lentamente que uma exponencial.

O estudante que conhece a transformada de Laplace, já conhece a de Fourier, ou em breve a conhecerá, formulará a questão natural de saber se a transformada de Fourier poderia ser usada na elaboração dos diagramas de blocos no lugar das de Laplace. A questão é pertinente, pois as mesmas funções que admitem transformadas de Laplace também admitem as de Fourier. Por exemplo, a transformada de Fourier da função seno envolve a distribuição Delta de Dirac.

A resposta a essa pergunta é que para sistemas simples, sim, é possível, mas devemos abrir mão da simplicidade da manipulação algébrica dos diagramas de blocos. Tal simplicidade é bem conhecida dos alunos. Uma boa referência é o clássico (OGATA, 2001). Essencialmente, a razão da simplicidade no caso da transformada de Laplace (L) e a sua perda no caso da de Fourier (F) está associada ao fato que no primeiro caso,

$$L(f)L(g) = 0 \rightarrow L(f) = 0 \; ou \; L(g) = 0 \qquad (5)$$

mas pode haver casos em que $F(f) \neq 0$ e $F(g) \neq 0$ mas $F(f)F(g) = 0$.

Esse fenômeno ocorre exatamente porque as transformadas de Laplace para funções f e g daquele tipo são analícas complexas, e portanto se $f \neq 0$, então existe um aberto Ω em que f não se anula, e como $fg = 0$, temos necessariamente que $g = 0$ em Ω. Mas como g é analítica, temos que $g = 0$ identicamente. No caso das transformadas de Fourier, elas não são funções analíticas para f e g daquela forma descrita acima.

Como exemplo, $F(H)(s) = \pi\delta(s) + PV\left(\frac{1}{is}\right)$, em que $PV\left(\frac{1}{is}\right)$ é o valor principal da função $s \rightarrow \left(\frac{1}{is}\right)$. Sabemos que se h é uma função contínua, $h\delta = 0$ não implica $h = 0$. De fato, basta apenas que $h(0) = 0$.

Considere agora o típico diagrama de blocos ilustrado na Figura 1. Vejamos exatamente onde entra a Propriedade (5).

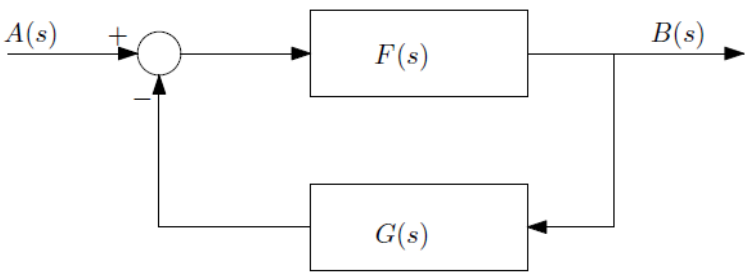

Figura 1 - Diagrama de blocos típico

A saída B é calculada por $B = (A - BG)F$. Fazemos agora a manipulação passo a passo, verificando se há alguma violação ou aplicação da Propriedade (5).

$$\begin{gathered} B = AF - BGF \\ B + BGF = AF \\ B(1 + GF) = AF \\ B(1 + GF) = AF(1 + GF)^{-1}(1 + GF) \\ B(1 + GF) - AF(1 + GF)^{-1}(1 + GF) = 0 \\ (B - AF(1 + GF)^{-1})(1 + GF) = 0. \end{gathered}$$

Até aqui, a Propriedade (5) não é invocada. Entretanto, o próximo passo natural seria concluir que

$$B - AF(1 + GF)^{-1} = 0,$$

o que é um erro, se não houver a validade da Propriedade (5)!

Por essa razão, as transformadas de Laplace, e não as de Fourier são usadas na construção de diagramas de blocos nos cursos de graduação. Seria interessante que nossos alunos compreendessem esse fato.

3. SÉRIES DE FOURIER E FUNÇÕES QUASE-PERIÓDICAS

Apresentamos agora um outro caso em que uma função pode ser determinada univocamente a partir do conhecimento de seu comportamento em um subconjunto de seu domínio. É o caso das funções periódicas. É claro que a medição de uma função periódica por um intervalo de tempo igual ou superior ao seu período a especifica para todos os instantes de $t \in R$.

O objetivo de recordarmos aqui as séries de Fourier é apenas fazer uma preparação para o tópico seguinte, o das funções quase periódicas, que apesar de não serem analíticas, podem ser determinadas univocamente da mesma forma que uma função analítica, isto é, a partir do conhecimento da função em um pequeno subconjunto (na verdade, um aberto arbitrariamente pequeno) do domínio.

Historicamente, a série de Fourier é denominada assim em homenagem a Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), que fez importantes contribuições para o estudo das séries trigonométricas, após investigações preliminares de Leonhard Euler, Jean le Rond d'Alembert, e Daniel Bernoulli. Fourier apresenta a série com o propósito de resolver a equação do calor em um anel de metal, publicando seus resultados preliminares em 1807 e 1811, em *Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides*, e posteriormente em sua *Théorie analytique de la chaleur*, em 1822. A história das séries de Fourier ilustra como a solução de um problema físico acaba gerando novas fronteiras na matemática.

É interessante notar que Fourier tenha usado um anel e não uma barra para o estudo da condução do calor, pois intuitivamente uma barra seria mais simples. Entretanto, a grande vantagem do anel é que a solução fica explicitamente periódica!

Dada uma função periódica $f(x)$, podemos aproximá-la por uma série de Fourier do seguinte modo. Se $f(x)$ for expressa como:

$$f(x) = a_0 + a_1 sin(x) + a_2 sin(2x) + a_3 sin(3x) + \ldots + b_1 cos(x) + b_2 cos(2x) + \ldots,$$

então os coeficientes de Fourier $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$, são dados por:

$$a_0 = < f(x) > = média\ de\ f(x) em\ um\ período;$$

$$a_n = 2 < f(x)\ sin(nx) > = duas\ vezes\ a\ média\ de\ f(x)\ sin(nx)\ em\ um\ período;$$

$$b_n = 2 < f(x) cos(nx) > = duas\ vezes\ a\ média\ de\ f(x) cos(nx) em\ um\ período.$$

De forma geral, suponhamos que f é uma função contínua que pode ser representada por uma série trigonométrica convergente da forma

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + b_n cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \right].$$

A série dada possui período $2L$, ou seja,

$$f(t + 2L) = f(t), \quad c \leq t \leq c + 2L,$$

e cujos coeficientes podem ser recuperados mediante a seguinte equação:

$$a_0 = 2 \int_c^{c+2L} \frac{f(t)}{2L} dt,$$

$$a_n = 2 \int_c^{c+2L} \frac{f(t)}{2L} sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt,$$
$$b_n = 2 \int_c^{c+2L} \frac{f(t)}{2L} cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt.$$

Uma função $f(x)$ é chamada função ímpar se $f(-x) = -f(x)$, para todo x real. Assim, as funções $f(x) = x^n$, com n ímpar, $f(x) = sen(ax)$ são exemplos de funções ímpares. Uma função $f(x)$ é chamada função par se $f(-x) = f(x)$, para todo x real. Assim, por exemplo, as funções $f(x) = x^n$, com n par, e $f(x) = cos(ax)$ são funções pares. Verifica-se facilmente que, para funções ímpares, $a_n = 0$ e para funções pares $b_n = 0$.

3.1. Funções quase-periódicas

A teoria das funções quase-periódicas foi criada e desenvolvida por H. Bohr (BOHR, 1923), e posteriormente desenvolvido por Vyacheslav Stepanov, Hermann Weyl e Abram Samoilovitch Besicovitch, dentre outros. A quase-periodicidade é uma generalização da periodicidade pura. De forma intuitiva, podemos imaginar uma função quase-periódica como uma função que pode ser aproximada por uma função periódica, dentro de qualquer nível desejado de precisão, desde que tenhamos “períodos”" suficientemente longos.

Podemos exemplificar essa propriedade da seguinte maneira. Seja a função

$$f(t) = \cos(2\pi\, t) + cos(\sqrt{3}\pi\, t). \tag{6}$$

A função $f(t)$ não é periódica no sentido tradicional, pois a razão $2\pi/\sqrt{3}\pi$ é irracional e, portanto, demonstra-se algebricamente que não existe nenhum valor de τ que satisfaça a equação

$$f(t + \tau) = f(t), \tag{7}$$

para todos valores de t.

Contudo, como todo número irracional pode ser aproximado por uma sequência de racionais, é possível estabelecer a existência de números para os quais a Equação (7) é aproximadamente satisfeita, com um grau de acurácia arbitrário.

Por exemplo, podemos, em uma primeira aproximação, utilizar $\sqrt{3} = 1{,}7$ e considerar a função

$$f_1(t) = \cos(2\pi\, t) + \cos(1{,}7\pi\, t). \tag{8}$$

como aproximação da função (6). A função f_1 é periódica (seu período é $\tau = 20$) e é uma aproximação de f. Tomando uma aproximação melhor de $\sqrt{3}$ (por exemplo, $1{,}73, 1{,}7320508$, etc.), podemos com o mesmo raciocínio, encontrar outras funções f_n, periódicas, tais que a diferença entre a função original f e a aproximada f_n seja tão pequena quanto se queira. Verifica-se que quanto maior a aproximação realizada, tanto maior será o período τ da função.

Além disso, como $cos(\lambda\, t) + i\, sin(\lambda\, t) = e^{i\,\lambda\, t}$, observa-se que para qualquer função quase-periódica corresponde uma “Série de Fourier”', dada por

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\,\lambda_n\, t} \tag{9}$$

em que λ_n são números reais, e A_n complexos, ou reais. No exemplo citado, vemos que a função (6) pode ser representada por

$$f(t) = \cos(2\pi\, t) + cos\left(\sqrt{3}\pi\, t\right) = \frac{1}{2}e^{2i\pi t} + \frac{1}{2}e^{-2i\pi t} + \frac{1}{2}e^{\sqrt{3}i\pi t} + \frac{1}{2}e^{-\sqrt{3}i\pi t}.$$

Na Engenharia, encontramos funções da forma (9) com frequência. Citamos, por exemplo, em processamento de sinais, vibrações de vigas, placas e cascas cilíndricas, modelagem de ondas e fenômenos vibratórios em geral. Em (KAWANO & ZINE, 2011), os autores apresentam um teorema de unicidade para distribuições quase-periódicas, em que, sob certas condições, conhecendo-se a função dada em (9), por um período de tempo arbitrariamente pequeno, então é possível determinar todos os coeficientes A_n, e portanto identificar completamente a função.

Finalizaremos este artigo com uma ilustração prática desse resultado, na identificação da força aplicada na viga de Euler-Bernoulli, a partir da medição da velocidade de apenas um ponto.

3.2. Um problema de identificação em uma viga de Euler-Bernoulli

Propomos nesta seção, como exemplo, o problema de identificação da fonte de vibração da viga de Euler-Bernoulli, por meio da medição da velocidade de um determinado ponto dela, durante um intervalo arbitrariamente pequeno, resolvendo, assim, um problema inverso da viga.

Utilizaremos a seguinte equação governante da viga, cuja análise e dedução das fórmulas são encontrada em vários textos de Resistência de Materiais, e nosso objetivo é encontrar as funções g e h:

$$EI\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho A\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = g(x)h(t) \qquad (10)$$

Com as condições iniciais definidas: viga engastada em ambas as extremidades, e a viga inicialmente em repouso.

Definindo as funções g e h como séries, da forma

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n S_n(x) \text{ e } h(t) = \sum_{m=0}^{M} k_n cos(2\pi mt),$$

em que a função $S_n(x)$ é conhecida, então é possível encontrar os coeficientes A_n e k_m, e assim recuperar ambas as funções.

De fato, a solução $w(x,t)$ da Equação (10) permite-nos calcular explicitamente a função velocidade dela, $U_{x_0}(t) = \frac{\partial w(x_0,t)}{\partial t}$, e com algumas manipulações algébricas, chegamos à forma seguinte para a função U.

$$U_{x_0}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{i\,\lambda_n\,t}$$

Utilizando o método descrito no artigo (KAWANO & ZINE, 2011), verificamos que, pela medição da velocidade da viga, é possível estimarmos α_n, e com essa informação, recuperamos a sequencia dos valores de A_n e k_m, encontrando assim as funções $g(x)$ e $h(t)$.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com este trabalho esperamos ter assinalado uma lacuna na formação matemática dos Engenheiros em nosso país, com a importância do estudo de funções complexas de uma variável, e de funções analíticas. Ainda, aproveitamos o caso das funções analíticas para ilustrar outras classes de funções que possuem a mesma propriedade. Nesse sentido, esforçamo-nos em fazer uma contribuição para a discussão das ementas de Matemática nas ciências básicas, nos cursos de Engenharia.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOHR, H. Sur les fonctions presque périodiques, **C.R.A.S**. 177, pp. 737-739, 1923.

KAWANO, A.; ZINE, A. Uniqueness and nonuniqueness results for a certain class of almost periodic distributions, **SIAM J. Math. Anal**. Vol. 43, No. 1, pp. 135-152, 2011.

KNOPP, K. Analytic Continuation and Complete Definition of Analytic Functions, Ch. 8 in Theory of Functions Parts I and II, Two Volumes Bound as One, Part I. New York: Dover, pp. 83-111, 1996.

NICAISE, S.; ZAIR, O. Determination of point sources in vibrating beams by boundary measurements : Identifiability, stability and reconstruction results, **Electronic Journal of Differential Equations**, 20 p1. 2004.

OGATA, K. Modern Control Engineering, 4th edition, Prentice Hall, 2001.

RUDIN, W. Real and complex analysis, 3rd ed., McGraw-Hill, Inc., New York, NY, 1987.

ANALYTICAL FUNCTIONS AND RELATED TOPICS IN A COURSE OF ENGINEERING: A FORGOTTEN ISSUE

Abstract: *In this paper, we point out a gap in the mathematical formation of our engineers. In general, courses in engineering cover classical topics, as Calculus and Linear Algebra, but not the functions of a complex variable, and neither analytic functions. However, the idea of analytic functions, which can be completely and unequivocally determined, only by knowing their behavior in a very small set, is crucial, many times, in more applied disciplines such as Dynamic Systems or Strength of Materials. We take the case of analytic functions to illustrate other classes of functions that have the same property. We try to make a contribution to the discussion of menus for basic sciences of Mathematics in Engineering.*

Key-words: *Engineering education, Basic equations, Almost periodic functions*