ASPECTOS PRÁTICOS SOBRE A MODELAGEM MATEMÁTICA DE UM SISTEMA DIDÁTICO DE CONTROLE DE NIVEL

Manoel Kolling Dutra – manoel.k@aluno.ifsc.edu
Instituto Federal de Santa Catarina, Campus Florianópolis, Departamento de Metalmecânica, Mestrado em Mecatrônica
Av. Mauro Ramos, 950, Centro
88020-300 – Florianópolis – Santa Catarina

Rômulo Lira Milhomem – romulo.milhomem@edu.sc.senai.br
Faculdade de Tecnologia SENAI Florianópolis
Rodovia SC 401, 3730, Saco Grande
88032-005 – Florianópolis – Santa Catarina

Carlos Fernando Oliveira Cabeça Neves – carlos.focn@posgrad.ufsc.br
Universidade Federal de Santa Catarina, Departamento de Automação e Sistemas
Campus Reitor João David Ferreira Lima, s/n, Trindade
88040-900 – Florianópolis – Santa Catarina

Resumo: *A modelagem matemática de sistemas dinâmicos é classicamente tratada no ensino de teoria de controle, visto que vários fenômenos físicos podem ser observados a partir desta abordagem. Por outro lado, o uso de sistemas didáticos em conjunto com esta ferramenta melhoram, significativamente, a abordagem deste tipo de conhecimento. Sob esse contexto, o presente trabalho apresenta os aspectos práticos relacionados ao desenvolvimento do modelo matemático de um processo largamente utilizado em sistemas industriais, realizado por alunos do Curso Superior de Tecnologia em Automação Industrial, utilizando um sistema didático instalado no Laboratório de Automação Industrial do SENAI Florianópolis.*

Palavras-chave: *Modelagem matemática, Modelos lineares, Sistemas de nível.*

1 INTRODUÇÃO

Um dos objetivos da utilização de sistemas didáticos em cursos de engenharia é tornar o ensino mais atraente a partir de uma abordagem prática e contextualizada, além de instigar a curiosidade dos alunos, fomentando a busca por informação e reforçar a necessidade de integrar conhecimentos. Neste contexto, a análise e estudo de alguns fenômenos físicos envolvidos nesses experimentos podem ser aplicados como uma importante ferramenta didática no ensino de teoria de controle e modelagem de sistemas dinâmicos, uma vez que os alunos têm oportunidade de pôr em prática conhecimentos adquiridos em sala, assim como podem ser iniciados a pesquisa cientifica (MILHOMEM *et. al*, 2010).

Apesar de ser uma temática frequentemente abordada em trabalhos relacionados (veja, por exemplo, (CARVALHO, 1998) e (RAMOS & WENSE, 2008)), modelos de plantas industriais são largamente utilizados no ensino de modelagem de sistemas dinâmicos e teoria

de controle (DORF & BISHOP, 2001; OGATA, 2002). Por este motivo, o tema instigou alunos do curso de Tecnologia em Automação Industrial, da Faculdade SENAI Florianópolis, de modo que um processo de controle de nível de líquidos pôde ser explorado e seu comportamento dinâmico obtido através de um modelo matemático simplificado, a partir de uma representação sob a forma de função de transferência (COELHO & DOS SANTOS COELHO, 2004). Assim, este trabalho tem por objetivo apresentar alguns desses aspectos práticos, relacionadas a modelagem matemática de um sistema didático de controle de nível.

Nesse sentido, na Seção 2, serão apresentados os aspectos construtivos da bancada didática utilizada no desenvolvimento do modelo matemático, desenvolvidas em (SILVA *et al.*, 2014) e (MACHADO *et al*. 2016). Na Seção 3, apresentam-se os resultados teóricos que permitiram a compreensão sobre a física do processo, onde determinam-se as equações que regem o comportamento dinâmico do sistema e seu modelo de pequenos sinais, sob a forma de função de transferência. Na Seção 4 é apresentada a validação do modelo desenvolvido, ambas as etapas foram realizadas por (DUTRA, 2015). Por fim, a Seção 5 recapitula os resultados e faz projeções para o futuro da bancada e sua contribuição para o ensino de Sistemas de Controle.

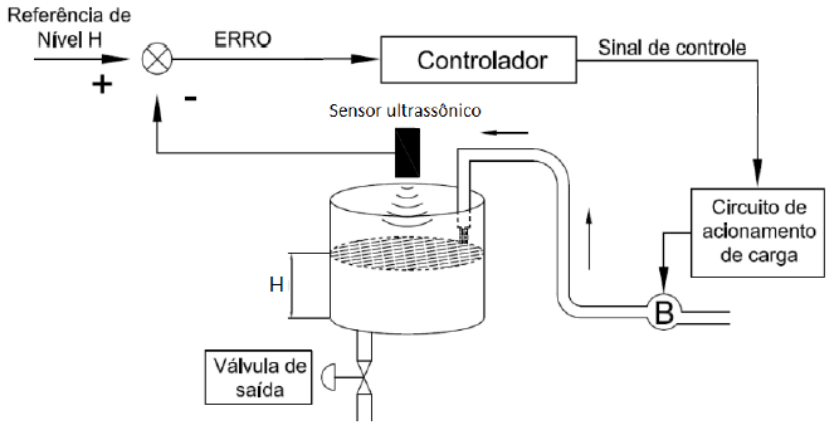
2 ASPECTOS PRÁTICOS DO SISTEMA

O processo a ser modelado é um Sistema de Controle de Nível (SNC) de água, o qual faz parte de uma bancada didática (Figura 1), onde também há um Sistema de Controle de Temperatura (SCT) incorporado.

Figura 1 - Bancada didática com SNC e SCT.

Para a simulação do SCN, a bancada didática dispõe de dois tanques acoplados por tubulações (Figura 1), cujo objetivo é manter o nível do tanque superior em um valor pré-estabelecido. O funcionamento desse sistema pode ser representado a partir da Figura 2.

Figura 2 - Diagrama de Funcionamento do SCN.



Para aferição do nível de água H no tanque é utilizado um sensor ultrassônico, que envia o sinal referente ao nível a um Controlador Logico Programável (CLP), onde pode ser inserido o valor de referência de nível e calculado o valor do erro. O atuador desse sistema é composto por um conjunto motor-bomba e um inversor de frequência (bomba B e circuito de acionamento de carga, Figura 2), que tem por objetivo controlar o fluxo (vazão) de água[1] do tanque inferior para o superior. A válvula de saída é uma válvula manual, do tipo globo, ajustada em metade do seu valor de abertura, cujo objetivo é regular o fluxo de água do tanque superior para o inferior. Este recurso fez-se necessário pois a vazão máxima de saída de água no tanque excede sua vazão máxima de entrada.

Sistemas com dinâmica semelhante já foram estudados por (CARVALHO, 1998) e (RAMOS & WENSE, 2008), os quais apresentam os modelos a equações diferenciais baseados no balanceamento de massas do processo e por uma representação em funções de transferência. Neste caso, o balanceamento de massa no sistema é feito controlando-se a vazão de água na entrada do tanque, ou na saída, comumente realizado a partir de válvulas de controle, onde já existem ferramentas de modelagem clássicas para representação desses sistemas, como apresentadas, por exemplo, em (DORF & BISHOP, 2001) e (OGATA, 2002).

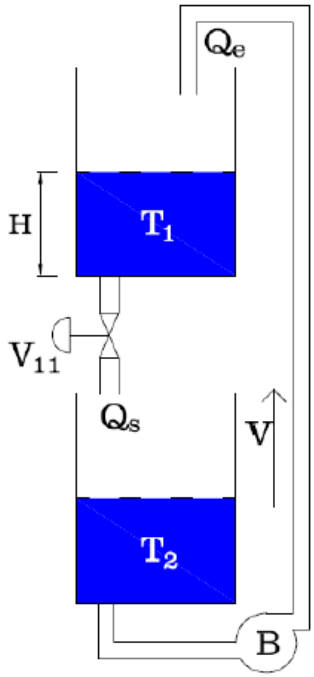
Por outro lado, o modelo desenvolvido neste trabalho leva em consideração a bomba B operando em velocidade variável, visto que este é o elemento do sistema que regula a vazão de entrada de água no tanque. Por este motivo, foi necessário encontrar uma relação analítica entre a velocidade angular do rotor da bomba e a vazão de entrada do tanque, pois não há um elemento sensor para aferir a vazão na saída da bomba. Será, portanto, apresentado a seguir o desenvolvimento do modelo matemático para o SCN da Figura 2.

3 MODELAGEM MATEMÁTICA

Na modelagem do SNC foi realizado um estudo de caso baseado em sistemas de controle de líquido a partir das particularidades da bancada didática, conforme apresentado na Seção 2. Para isso, foi observado a relação das variáveis do SNC, considerando-se o diagrama apresentado na Figura 3.

[1] Água a temperatura ambiente: 25° C

Figura 3 - Diagrama do SNC.



Para início do desenvolvimento do modelo, considera-se que a taxa de variação de massa acumulada em T_1 é igual a vazão mássica de entrada W_e menos a vazão mássica de saída W_s neste tanque (CARVALHO, 1998). Portanto, considera-se o equilíbrio dinâmico:

$$\frac{\partial V\rho}{\partial t} = (We - Ws). \tag{1}$$

Como o objetivo é desenvolver um modelo de nível simplificado, propõe-se a representação de (1) por:

$$A\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{\rho}(We - Ws). \tag{2}$$

A Equação (2) é encontrada fazendo $V = H\,A$. Como $W = \rho.Q$, para o nível de água em T_1 tem-se:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{A}(Qe - Qs), \tag{3}$$

onde: H é a altura de água do tanque T_1, A é a área da seção transversal do tanque T_1, Qe é a vazão de entrada e Qs a vazão de saída em T_1, dado em m^3/s, ρ é a massa volumétrica da água, e t denota a variável tempo.

A Equação (3) descreve a variação de nível em função das vazões de entrada e saída. Nesta equação, para tratar do equilíbrio do sistema, considera-se a variação do volume V nula, ou seja,

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \Rightarrow 0 = Qe - Qs \Rightarrow Qs = Qe. \tag{4}$$

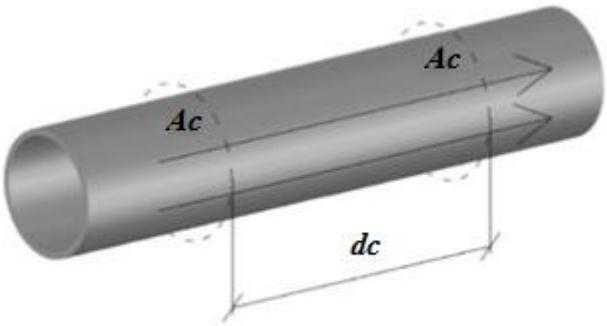
Portanto, a condição de equilíbrio do sistema ocorre quando a vazão de entrada se iguala a vazão de saída de T_1, para um determinado ponto de operação. A identificação dos pontos de equilíbrio de um sistema dinâmico é importante, pois pode-se observar particularidades do sistema, como em estudos de bifurcação e caos (MONTEIRO, 2006). Na sequência, serão determinados quais aspectos físicos do sistema de nível são relevantes para determinar a vazão de entrada *Qe* e a vazão de saída *Qs*, a fim de determinar um modelo representativo do sistema de nível.

3.1 Vazão de Entrada do Sistema de Nível

A partir da análise do sistema real, observou-se que a variável *Qe* não poderia ser mensurada diretamente. No entanto, indiretamente, é possível ter uma aproximação da medida desta variável a partir do sinal de controle enviado ao circuito de acionamento de carga. Este circuito recebe um sinal de referência entre os valores de 0 a 10 *Volts*, que consequentemente leva o conjunto motor-bomba operar a uma velocidade de 0 a 3450 rotações por minuto (RPM). Consequentemente, a vazão de saída da bomba é proporcional a vazão de entrada de T_1, conforme ilustrado na Figura 2.

Partindo desta hipótese, necessita-se encontrar uma relação aproximada entre a velocidade angular do motor da bomba e a vazão de entrada *Qe* do sistema. Deste modo, considera-se que pelo interior da tubulação passa uma determinada massa de água, a uma certa taxa de variação de tempo. Assim, partindo de uma análise geométrica de uma secção da tubulação é possível observar a geometria de um cilindro, conforme mostrado na Figura 4.

Figura 4 – Secção da tubulação.



Ao analisar a geometria de uma secção da tubulação, observa-se a representação da geometria de um cilindro (Figura 4), o qual tem seu volume dado por

$$Vc = dc \times Ac, \tag{5}$$

sendo: *Vc*, *dc* e *Ac*, o volume, o comprimento e a área da secção transversal do cilindro, respectivamente. Pode-se, então, começar a tratar a relação entre vazão de entrada *Qe* e velocidade angular da bomba. Assim, pode se tomar a Equação (6), que representa a vazão volumétrica de um fluido (BRUNETTI, 2007)

$$Qv = \frac{Vf}{t}, \tag{6}$$

onde: *Qv* é a vazão volumétrica, *Vf* é o volume do fluido. Fazendo *Vf* = *Vc* e substituindo (5) em (6), obtém-se

$$Qv = \frac{dc \times Ac}{t}. \tag{7}$$

A partir das leis da mecânica clássica, sabe-se que a velocidade de uma partícula qualquer pode ser dada pela variação da distância pelo tempo: $Vel = dp/t$ (*Vel* é a velocidade da partícula e *dp* a distância percorrida). Assim, é possível obter

$$Qv = Vel \times Ac \text{, onde } Ac = \pi r^2 \tag{8}$$

Considera-se, então, que a água sai da bomba com velocidade *vel*, de forma que a vazão volumétrica *Qv* (Equação (8)) possa representar a vazão de entrada *Qe*. Assim, a relação entre velocidade angular e linear de uma partícula que se movimenta em uma trajetória circular de raio *r* pode ser expressa por $Vesc = \omega \times r$, onde *Vesc* é a velocidade linear em *m/s*, ω é a velocidade angular em *rad/s* e *r* é o raio do recalque da bomba em metros. Cabe lembrar que a relação entre velocidade angular e velocidade escalar é:

$$1 \text{ RPM} = 2\pi \, rad/m = \frac{2\pi}{60} = rad/s \Rightarrow xRPM = x\frac{2\pi}{60} rad/s. \tag{9}$$

Portanto:

$$\omega = \frac{2\pi}{60} rad/s. \tag{10}$$

Sendo assim, substituindo a relação (10) em $Vesc = \omega \times r$, obtém-se:

$$V_{esc} = \frac{2\pi r \, V_{RPM}}{60} \tag{11}$$

Para facilitar a modelagem da relação vazão de entrada *Qe* de T_1 em função da variação da velocidade angular do conjunto motobomba, desconsiderou-se algumas não linearidades desse sistema, como a relação entre pressão e vazão na bomba, visto que, deseja-se tratar essa relação de forma simplificada para obter o conhecimento sobre a física do processo de forma geral, visando compreender a dinâmica em termos de entrada e saída dessa etapa do processo. Desta maneira, substitui-se (11) em (8), obtendo:

$$Q_e = (\delta\alpha) V_{RPM}(t) \;\; {}^{m^3}/_{s}, \tag{12}$$

onde δ representa a relação $\frac{A_c \, \pi r}{30}$ e α é um fator de ponderação para ajuste e correção do modelo, encontrado de forma empírica, visando linearizar a relação entre a vazão e a pressão no recalque da bomba.

3.2 Vazão de Saída do Sistema de Nível

Considerando o balanço de massa da Equação (1) para uma determinada densidade do liquido utilizado (água), e desconsiderando a influência da válvula de saída de T_1, adota-se o fluxo de saída laminar, visto que, as velocidades envolvidas no processo são baixas (BRUNETTI, 2007). Assim, a vazão de saída *Qs* é proporcional ao nível *H* (CARVALHO, 1998; OGATA, 2002). Assim, tem-se que:

$$Qs = K \times H \,, \tag{13}$$

onde *K* representa uma resistência empregada pela válvula a passagem de água, além de compor parte das não-linearidades do sistema (OGATA, 2002).

3.3 Modelo Simplificado do processo

Portanto, o modelo simplificado do processo pode ser representado substituindo as Equações (12) e (13) em (3), obtendo-se:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{A}[(\delta\alpha)V_{RPM}(t) - KH(t)], \tag{14}$$

onde *H* é o nível do liquido em T_1, *A* é a área da seção transversal de T_1, δ é a relação entre a velocidade linear do liquido no recalque da bomba em *m/s* e a rotação da bomba em RPM, V_{RPM} é a velocidade angular da bomba, *K* e α foram definidos anteriormente.

O modelo em (14) foi alcançado considerando algumas particularidades do sistema, tratados de forma simplificada, que podem ser representados pela Figura 3. Nesse sentido, as vazões *Qe* e *Qs* representam as variações de volume ou distúrbios no processo.

O modelo apresentado, de certa forma, é linear. No entanto, a relação entre pressão e vazão no recalque da bomba é não-linear, a qual foi desconsiderada na análise da vazão de entrada. Por outro lado, é possível tratar esse problema como um sistema sujeito a uma classe de não linearidades na entrada de controle pertencentes a uma faixa de operação, neste caso, o sistema de controle pode ser aproximado por um sistema linear com perturbação aditiva limitada, onde podem ser empregadas ferramentas de controle robusto para solução do problema (MILHOMEM, 2013).

3.4 Função de Transferência Paramétrica

A função de transferência de um sistema representado por uma equação diferencial linear invariante no tempo é definida como a relação entre a Transformada de Laplace da saída e da entrada, admitindo-se todas as condições iniciais nulas (OGATA, 2002). Dessa forma, aplicando a Transformada de Laplace na Equação (14), obtém-se:

$$\frac{H(S)}{V_{RPM}(S)} = \frac{(\delta\alpha)/A}{S + K/A}. \tag{15}$$

A razão entre a saída e a entrada do sistema é dada pela Equação (14), que representa a função de transferência genérica do sistema de nível em estudo.

3.5 Função de Transferência Numérica

A condição de equilíbrio do sistema ocorre quando a vazão de entrada se iguala a vazão de saída em T_1, para um determinado ponto de operação $H(0)$ e $V_{RPM}(0)$. Assim, foram realizados experimentos práticos visando encontrar os valores que levam o sistema ao equilíbrio, onde foram obtidos $H(0)$ = 0.38 m e $V_{RPM}(0)$ = 2150 RPM. Portanto, a partir da estabilidade do sistema nos pontos de operação, é possível encontrar a relação de K utilizando as relações em (4), que representam o balanço de massa do sistema. Assim, tem-se que:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \Rightarrow Q_s = Q_e \Rightarrow K = \frac{(\delta\alpha)V_{RPM}(0)}{H(0)}. \tag{16}$$

Em outro experimento foram obtidos os parâmetros reais do SCN, considerando o modelo simplificado em (14), onde α = 0.2, δ = 6.6 x 10^{-7} e A = 0.096. Assim, substituindo esses valores em (16), tem-se que K = 7.468 x 10^{-4}. A partir dos valores obtidos é possível chegar a uma função de transferência numérica, que pode ser expressa substituindo os valores das variáveis na Equação (15):

$$\frac{H(S)}{V_{RPM}(S)} = \frac{13.75 \times 10^{-4}}{S + 7.779}. \tag{17}$$

Desta forma, foi possível estabelecer os valores e a relação de todas as variáveis do modelo proposto, os quais são necessários para a validação do modelo.

4 VALIDAÇÃO DO MODELO

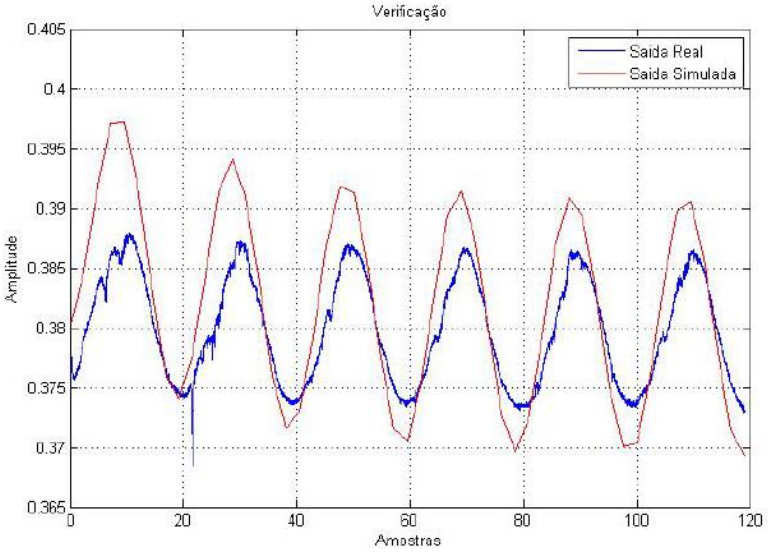
É importante que o modelo mostre a influência de parâmetros distribuídos, isto é, aqueles que dão origem a equações diferenciais parciais (OGATA, 2002). No caso particular do SCN, as variações de nível estão relacionadas com a altura H da massa de água de T_1 em relação ao tempo t. Desta forma, com o objetivo de avaliar a utilidade do modelo proposto e valida-lo, alguns sinais foram excitados na entrada do sistema da Figura 3, em torno do ponto de operação $H(0)$ = 0.38 m e $V_{RPM}(0)$ = 2150 RPM. As características dos sinais de entrada são apresentadas na Tabela 1.

Tabela 1 – Sinais excitados na entrada do sistema.

Tipo de Sinal	Frequência (Hz)	Amplitude (RPM)
Senoidal	0.01 a 0.5	500 a 1500
Quadrado	0.05 a 0.5	500 a 1500
Triangular	0.1 a 0.5	500 a 1500

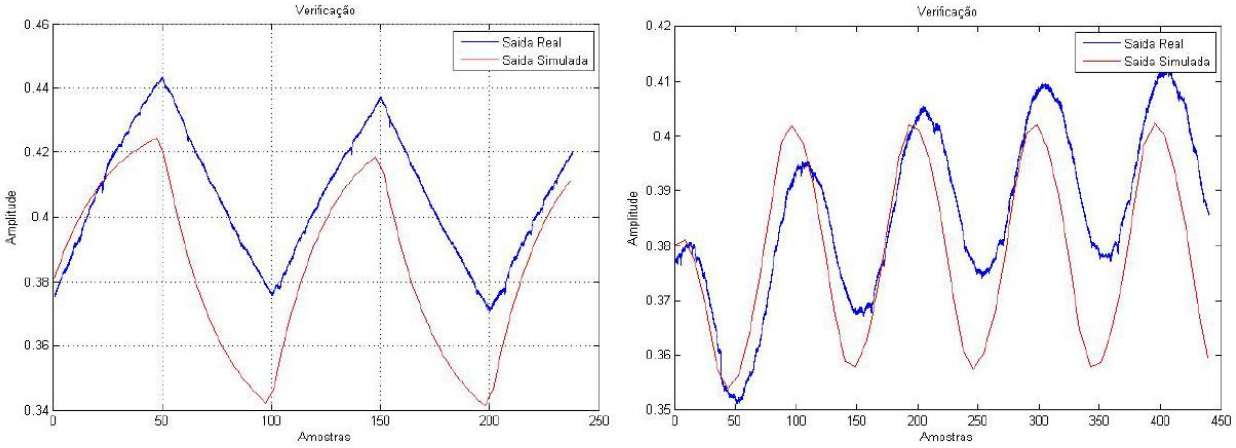
A primeira comparação apresentada é para o sinal de entrada do tipo onda senoidal, com frequência e amplitude dentro das faixas apresentadas na Tabela 1. A Figura 5 apresenta o comportamento simulado do sistema em relação ao seu comportamento real.

Figura 5 - Saída Real x Saída Simulada, para onda senoidal.



A partir da análise da Figura 5, observa-se que amplitude e frequência estão próximas, mostrando que o modelo da Equação (17) representa satisfatoriamente o sistema de nível, tratando-se de uma representação em pequenos sinais. Em relação a amplitude, representada pelo nível *H*, é possível perceber que a saída simulada varia dentro de uma faixa entre 0.396 m e 0.390 m, já a saída real varia dentro de uma faixa entre 0.387 m e 0.385 m. Estes dados mostram uma diferença de ±2% entre as amplitudes do sinal do modelo do sistema e do sinal do sistema real. Para um sinal de entrada do tipo onda quadrada, Figura 6 a), observa-se que a amplitude da saída simulada varia dentro de uma faixa entre 0.425 m e 0.412 m, já a saída real varia dentro de uma faixa entre 0.440 m e 0.420 m. Estes dados mostram uma diferença de ±7. 5% entre as amplitudes do sinal do modelo do sistema e do sinal do sistema real.

Figura 6 - Saída Real x Saída Simulada, para: a) onda quadrada, b) onda triangular.



Além disso, foi realizada uma simulação para um sinal de entrada do tipo onda triangular, apresentada na Figura 6b), é possível novamente perceber, que as características como amplitude e frequência estão próximas, demonstrando a utilidade do modelo da Equação (17). Em relação a amplitude representada pelo nível *H* observa-se que a saída simulada varia dentro de uma faixa entre 0.380 m e 0.400 m, já a saída real varia dentro de uma faixa entre 0.378 m e 0.415 m. Estes dados mostram uma diferença de ±4.5% entre as amplitudes do

sinal do modelo do sistema e do sinal do sistema real. Foi possível observar, portanto, a partir das simulações do modelo da Equação (17) e dos dados reais da planta didática da Figura 1, que os dados relativamente coincidiram. Este resultado apresenta a validade da modelagem matemática realizada visto que se trata de um modelo para pequenos sinais.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A proposta de desenvolver um modelo matemático que descrevesse a dinâmica de uma planta de nível foi realizado e atingido com êxito, dentro dos parâmetros considerados representado pelo modelo da Equação (17). Estes resultados mostram principalmente que o modelo apresentado é válido em torno de um ponto de operação, conforme a teoria de controle apresenta.

Além disso, devido as características construtivas do sistema real, apresentadas na Sessão 2, o modelo possui particularidades inerentes a planta, instigando os alunos a buscarem abordagens práticas para solução de problemas geralmente encontrados em situações reais no mercado de trabalho. Conforme apresentado nas Figuras 5 e 6, é possível entender que o modelo proposto é, de certa forma, geral e que pode ser aplicado a outros sistemas similares. Entretanto, o modelo pode ser melhorado a partir das considerações das não-linearidades do recalque da bomba e a não linearidade do próprio tanque em outros pontos de operação diferentes aos utilizados.

Por outro lado, o projeto tem sua relevância no ensino de controle de processos, sobretudo em dois aspectos. O primeiro refere-se aos alunos que desenvolveram os projetos, a construção da bancada (SILVA *et. al*, 2014) e sua modelagem (DUTRA, 2015), os quais tiveram a oportunidade de aplicar conceitos teóricos e uma atividade prática. Por consequência, o modelo encontrado e o sistema real são largamente utilizados em aulas teóricas e práticas dos cursos de automação da Unidade SENAI Florianópolis. O segundo aspecto é relacionado a forma didática e prática que o modelo proposto foi encontrado, de forma que a abordagem apresentada na Seção 3 é abordada em aulas de controle de processos em conjunto com o sistema da bancada, apresentando um exemplo real aos alunos de forma a facilitar o aprendizado da disciplina.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRUNETTI, F. Mecânica dos fluidos, Pearson Prentice Hall. 2007.

CARVALHO, N. D. L. Projeto e Implementação de um Sistema de Tanques Para Controle de Nível, Vazão e Temperatura Usando Tecnologia FieldBus. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, UFMG. 1998.

COELHO, A. A. R. AND DOS SANTOS COELHO, L. Identificação de Sistemas Dinâmicos Lineares, Editora da UFSC. 2004.

DORF, R. C. AND BISHOP, R. H. Sistemas de Controle Mordernos, 8 edn, Editora LTC. 2001.

DUTRA, M. K. Modelagem de Sistemas Dinâmicos: case aplicado a bancada de controle de nível. Monografia de Conclusão de Curso de Tecnologia, Curso Superior de Tecnologia em Automação Industrial, Faculdade SENAI/SC Florianópolis. 2015.

MILHOMEM, R. L.; BAYMA, R. S.; CASTRO, A. M.; SILVA, C. D. Experiências Pedagógicas no Desenvolvimento de uma Bancada de Levitação Magnética. Anais do XVIII Congresso Brasileiro de Automática. Bonito, 2010. p. 558–564.

MILHOMEM, R. L. Análise e síntese de sistemas sujeitos a uma classe de perturbações limitadas e aplicações, Master's thesis, UFSC. 2013.

MONTEIRO, L. H. A. Sistemas dinâmicos, Editora Livraria da Física. 2006.

OGATA, K. Modern Control Engineering, Prentice-Hall. 2002.

RAMOS, A. P. AND WENSE, G. L. B. Sistema Didático de Nível de Líquidos. Monografia de Conclusão de Curso de Graduação, Engenharia Eletrônica, FT/UNB. 2008.

SILVA, E. S., DA SILVA MURARO, M. V. AND SILVEIRA, R. Controle de Nível e Temperatura em Reservatório de Água. Projeto Integrador, Curso Superior de Tecnologia em Automação Industrial, Faculdade SENAI/SC Florianópolis. 2014.

PRACTICAL ASPECTS ON MATHEMATICAL MODELING OF A LEVEL CONTROL SYSTEM

Abstract: Mathematical modeling of dynamic systems is classically treated in control theory teaching, since various physical phenomena can be observed from this approach. Moreover, the use of educational systems together with this tool, improve significantly the approach of this type of knowledge. In this context, this paper presents the practical aspects related to the mathematical model development of a widely used process in industrial systems, performed by students of Industrial Automation Technology, used a didactic system installed in the Industrial Automation Laboratory of SENAI Florianópolis.

Key-words: Mathematical modeling, Linear models, Level systems.

.