



## ANÁLISE CINEMÁTICA, COMPUTACIONAL DE UM MECANISMO QUATRO BARRAS

**Douglas Silva Marques Serrati** – [douglasserrati@gmail.com](mailto:douglasserrati@gmail.com)  
Universidade Federal de Uberlândia  
Av. João Naves de Ávila, 2121, bairro Santa Mônica  
CEP 38408-100 – Uberlândia – Minas Gerais

**Resumo:** *Este trabalho analisa cinematicamente a posição, velocidade e aceleração de cada barra e de alguns pontos importantes do mecanismo quatro barras. Para isso foi desenvolvido um modelo matemático que expresse cada condição do movimento do sistema. Para isso, foi desenvolvido um programa computacional que atende a várias especificações, como: limitação matemática, dimensões das barras. Nele o usuário é alertado caso insira algum valor errado. Isso torna a análise mais precisa e confiável. É discutido, brevemente, sobre a lei de Grashof para este tipo de mecanismo, que este trás conhecimento do movimento que o sistema realizará. Portanto, a importância dessa análise está em se conhecer melhor esse mecanismo de forma a trazer maior confiança ao se projetar um mecanismo quatro-barras.*

**Palavras-chave:** *Mecanismos, Quatro barras, Cinemática, Análise computacional*

Organização



**UDESC**  
UNIVERSIDADE  
DO ESTADO DE  
SANTA CATARINA



Promoção





## 1. INTRODUÇÃO

O mecanismo quatro barras é bastante utilizado, devido a sua simplicidade. Este é classificado como mecanismo de movimento periódico. Para que ela seja integrante de uma máquina seus movimentos devem ser conhecidos visando a obtenção de um projeto viável tecnicamente.

A análise deste mecanismo foi feita baseada no desenvolvimento matemático e através de modelagem computacional, criando um programa em MATLAB, o usuário informa as dimensões das barras e o ângulo de duas barras, que são a fixa e a que movimentam o sistema. A partir disso, obtém-se a posição, velocidade e aceleração das barras e dos pontos em que estão ligadas. São fornecidos gráficos, que juntamente com os resultados numéricos, permitirá concluir sobre o movimento que as barras estão realizando.

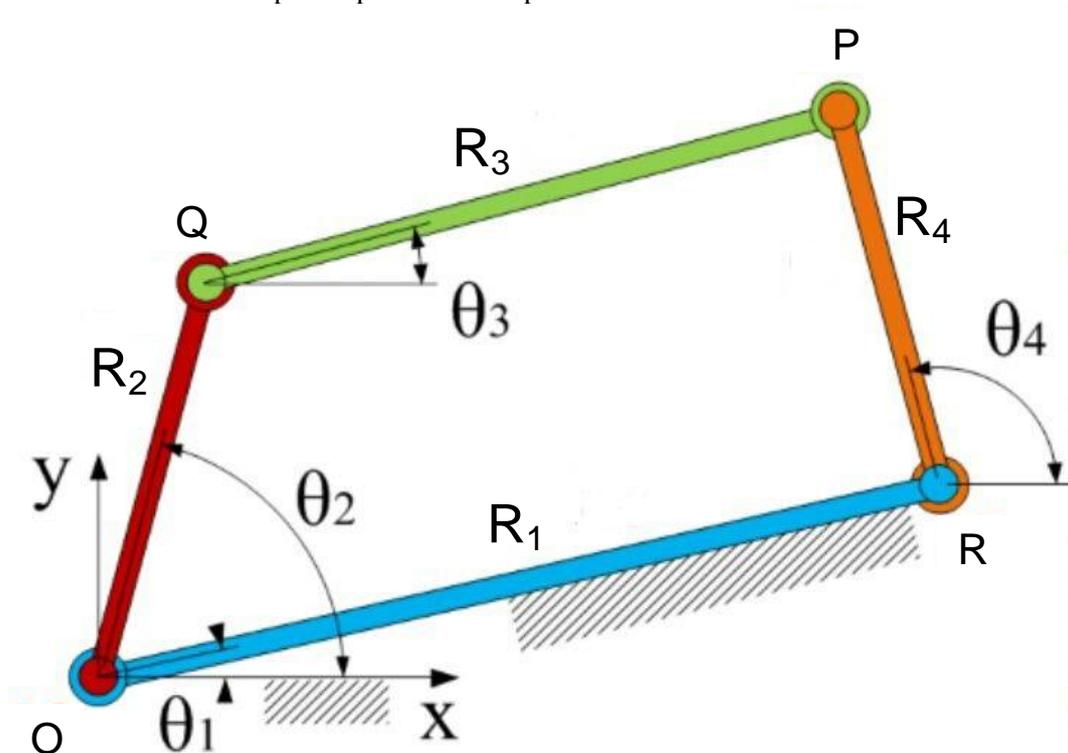
## 2. MODELAGEM COMPUTACIONAL E MATEMÁTICA

O programa desenvolvido para a análise cinemática do mecanismo quatro barras será citado no decorrer do trabalho, mas não será possível colocá-lo neste trabalho porque é extenso.

### 2.1. Modelagem matemática

Para obtermos matematicamente a representação da posição, velocidade e aceleração, será realizado o estudo considerando as barras como vetores e então, a partir da equação da posição, derivando temos a equação da velocidade e derivando novamente conseguimos a aceleração. Consideremos as variáveis da figura 1 para o todo o trabalho.

Figura 1: Mecanismo quatro barras e suas variáveis. Fonte: <https://br.pinterest.com/pin/274297433531758343/>



Organização

Promoção



A barra 1 é fixa, logo, o seu ângulo é constante, além de que o comprimento de todas as barras não variam, então temos  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$  e  $\Theta_1$  constantes. Essa condição não afetará a determinação da posição das barras e dos pontos P, Q e R, isso afetará apenas quando determinarmos a velocidade e aceleração, pois a derivada de constante é zero.

A posição dos pontos é:

$$R_P = R_2 + R_3 = R_1 + R_4 \quad (1)$$

$$R_Q = R_2 = R_2[\cos(\Theta_2) \vec{i} + \sin(\Theta_2) \vec{j}] \quad (2)$$

$$R_R = R_1 = R_1[\cos(\Theta_1) \vec{i} + \sin(\Theta_1) \vec{j}] \quad (3)$$

Através da “Equação (1)” determinamos a velocidade e aceleração das barras e do ponto P, já na “Equação (3)” vemos que o ponto R não realizará movimento, pois a barra 1 é fixa. E para definirmos a velocidade e aceleração do sistema, temos ainda que definir aquela barra que será responsável pela movimentação do sistema, com essa condição, sabemos que as velocidades e acelerações dependem não apenas das dimensões e posições das barras do sistema, como também depende de qual barra movimentamos o sistema.

#### ***A barra 2 é a responsável pela movimento***

Quando escolhemos uma barra como a responsável pelo movimento do sistema, implica em conhecermos a sua posição, velocidade e aceleração, além de conhecermos também a posição da barra 1. Na “Equação (1)”, para esse caso, não conhecemos os ângulos  $\Theta_3$  e  $\Theta_4$ , temos dois ângulos desconhecidos, então isolamos aquele que queremos eliminar, da forma:

$$R_3 \cos(\Theta_3) = R_1 \cos(\Theta_1) + R_4 \cos(\Theta_4) - R_2 \cos(\Theta_2) \quad (4)$$

$$R_3 \sin(\Theta_3) = R_1 \sin(\Theta_1) + R_4 \sin(\Theta_4) - R_2 \sin(\Theta_2) \quad (5)$$

Para eliminarmos  $\Theta_3$ , elevamos as duas equações ao quadrado e somamos, lembrando que  $\sin^2(\Theta) + \cos^2(\Theta) = 1$ . Obtemos:

$$R_3^2 = R_1^2 + R_2^2 + R_4^2 + 2R_1R_4[\cos(\Theta_1)\cos(\Theta_4) + \sin(\Theta_1)\sin(\Theta_4)] - 2R_1R_2[\cos(\Theta_1)\cos(\Theta_2) + \sin(\Theta_1)\sin(\Theta_2)] - 2R_2R_4[\cos(\Theta_2)\cos(\Theta_4) + \sin(\Theta_2)\sin(\Theta_4)] \quad (6)$$

A “Equação (6)” nos colocou o ângulo desconhecido  $\Theta_4$  em função de dois ângulos conhecidos ( $\Theta_1$  e  $\Theta_2$ ), mas para deixar isso mais claro e mais simples, temos:

$$A = 2R_1R_4 \cos(\Theta_1) - 2R_2R_4 \cos(\Theta_2) \quad (7)$$

$$B = 2R_1R_4 \sin(\Theta_1) - 2R_2R_4 \sin(\Theta_2) \quad (8)$$

$$C = -R_3^2 + R_1^2 + R_2^2 + R_4^2 - 2R_1R_2[\cos(\Theta_1)\cos(\Theta_2) + \sin(\Theta_1)\sin(\Theta_2)] \quad (9)$$

Com essa simplificação escrevemos a “Equação (6)” da forma:

$$A \cos(\Theta_4) + B \sin(\Theta_4) + C = 0 \quad (10)$$

Organização



Promoção





Para encontrarmos o ângulo  $\Theta_4$  é preciso usarmos as identidades trigonométricas

$$\text{sen}(\Theta_4) = \frac{2tg\left(\frac{\Theta_4}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{\Theta_4}{2}\right)} \quad (11)$$

$$\text{cos}(\Theta_4) = \frac{1-tg^2\left(\frac{\Theta_4}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{\Theta_4}{2}\right)} \quad (12)$$

Substituindo as “Equações 11 e 12” na “Equação 10”, obtemos

$$(C - A)t^2 + 2Bt + A + C = 0 \quad (13)$$

$$t = tg\left(\frac{\Theta_4}{2}\right) \quad (14)$$

Resolvendo a equação de segundo grau, chegamos em

$$t = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - C^2 + A^2}}{C - A} \quad (15)$$

$$\Theta_4 = 2tg^{-1}(t) \quad (16)$$

É importante observarmos que na “Equação (15)” conseguimos dois resultados válidos para expressarmos o ângulo  $\Theta_4$ , ambos configuram o sistema de forma correta, alterando apenas a posição. Caso tenhamos raiz quadrada de número negativo, caso  $(A^2+B^2) < C^2$ , o mecanismo não pode ser representado, pois em algum local do sistema não está linkado. Podemos observar que para satisfazer a desigualdade citada, na “Equação (9)” o comprimento da barra 3 deve ser menor que as demais, não proporcionando assim, dimensão mínima para que o sistema seja ligado em todos os pontos (O,P,Q e R).

Agora, conhecemos os valores de todos os ângulos com exceção de  $\Theta_3$ , que pode ser encontrado pela razão da “Equação (5)” pela “Equação (4)”, dessa forma

$$\Theta_3 = tg^{-1} \frac{R_1 \text{sen}(\theta_1) + R_4 \text{sen}(\theta_4) - R_2 \text{sen}(\theta_2)}{R_1 \text{cos}(\theta_1) + R_4 \text{cos}(\theta_4) - R_2 \text{cos}(\theta_2)} \quad (17)$$

Com essas equações, podemos encontrar a posição do ponto P, segundo a “Equação (1)”.

Após a dedução da posição, o próximo passo é determinarmos a velocidade a partir da derivação da “Equação (1)” em função dos ângulos. Então, a velocidade dos pontos P e Q são:

$$\frac{dR_P}{d\theta} = \frac{dR_2}{d\theta_2} + \frac{dR_3}{d\theta_3} = \frac{dR_1}{d\theta_1} + \frac{dR_4}{d\theta_4} \quad (18)$$

Sabemos que a derivada de  $R_1$  em função de  $\Theta_1$  é zero, pois a barra q é fixa, logo, a

Organização



Promoção





velocidade do ponto P pode ser expressa apenas pela derivada de  $R_4$ . Através da “Equação (18)”, temos a relação:

$$R_2 \dot{\theta}_2 \text{sen}(\theta_2) + R_3 \dot{\theta}_3 \text{sen}(\theta_3) = R_4 \dot{\theta}_4 \text{sen}(\theta_4) \quad (19)$$

$$R_2 \dot{\theta}_2 \text{cos}(\theta_2) + R_3 \dot{\theta}_3 \text{cos}(\theta_3) = R_4 \dot{\theta}_4 \text{cos}(\theta_4) \quad (20)$$

Como a barra 2 é a que movimenta o sistema, não conhecemos  $\dot{\theta}_3$  e  $\dot{\theta}_4$ . Podemos descobrir essas variações dos ângulos de forma similar ao processo realizado para encontrarmos  $\theta_3$  e  $\theta_4$ . Mas para reduzir o número de equações, podemos usar a forma matricial que fica como:

$$\begin{bmatrix} -R_3 \text{sen}(\theta_3) & R_4 \text{sen}(\theta_4) \\ -R_3 \text{cos}(\theta_3) & R_4 \text{cos}(\theta_4) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_2 \dot{\theta}_2 \text{sen}(\theta_2) \\ R_2 \dot{\theta}_2 \text{cos}(\theta_2) \end{pmatrix} \quad (21)$$

Assim sendo, a velocidade do ponto R é zero e do ponto Q é:

$$\frac{dR_Q}{d\theta} = \frac{dR_2}{d\theta} = R_2 \dot{\theta}_2 [-\text{sen}(\theta_2)\vec{i} + \text{cos}(\theta_2)\vec{j}] \quad (22)$$

Derivando a posição novamente, obtemos a aceleração, onde não conheceremos  $\ddot{\theta}_3$  e  $\ddot{\theta}_4$ . Da mesma forma, colocaremos na forma matricial

$$\begin{bmatrix} -R_3 \text{sen}(\theta_3) & R_4 \text{sen}(\theta_4) \\ -R_3 \text{cos}(\theta_3) & R_4 \text{cos}(\theta_4) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_2 \ddot{\theta}_2 \text{sen}(\theta_2) + R_2 \dot{\theta}_2^2 \text{cos}(\theta_2) + R_3 \ddot{\theta}_3 \text{cos}(\theta_3) - R_4 \ddot{\theta}_4 \text{cos}(\theta_4) \\ R_2 \ddot{\theta}_2 \text{cos}(\theta_2) - R_2 \dot{\theta}_2^2 \text{sen}(\theta_2) - R_3 \ddot{\theta}_3 \text{sen}(\theta_3) - R_4 \ddot{\theta}_4 \text{sen}(\theta_4) \end{pmatrix} \quad (23)$$

E a aceleração dos pontos P e Q são:

$$\ddot{R}_Q = (-R_2 \ddot{\theta}_2 \text{sen}(\theta_2) - R_2 \dot{\theta}_2^2 \text{cos}(\theta_2))\vec{i} + (R_2 \ddot{\theta}_2 \text{cos}(\theta_2) - R_2 \dot{\theta}_2^2 \text{sen}(\theta_2))\vec{j} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \ddot{R}_P = & (R_2 \ddot{\theta}_2 \text{sen}(\theta_2) + R_2 \dot{\theta}_2^2 \text{cos}(\theta_2) + R_3 \ddot{\theta}_3 \text{sen}(\theta_3) + R_3 \dot{\theta}_3^2 \text{cos}(\theta_3))(-\vec{i}) + \\ & (R_2 \ddot{\theta}_2 \text{cos}(\theta_2) - R_2 \dot{\theta}_2^2 \text{sen}(\theta_2) + R_3 \ddot{\theta}_3 \text{cos}(\theta_3) - R_3 \dot{\theta}_3^2 \text{sen}(\theta_3))\vec{j} = (R_4 \ddot{\theta}_4 \text{sen}(\theta_4) + \\ & R_4 \dot{\theta}_4^2 \text{cos}(\theta_4))(-\vec{i}) + (R_4 \ddot{\theta}_4 \text{cos}(\theta_4) - R_4 \dot{\theta}_4^2 \text{sen}(\theta_4))\vec{j} \end{aligned} \quad (25)$$

Com isso, obtemos então a posição de todas as barras e os pontos P, Q e R, além de determinarmos a velocidade e aceleração destes. Mas essas equações só são válidas para caso a barra 2 seja a responsável pelo movimento do sistema.

### ***Caso a barra 3 ou a barra 4 seja responsável pelo movimento do sistema***

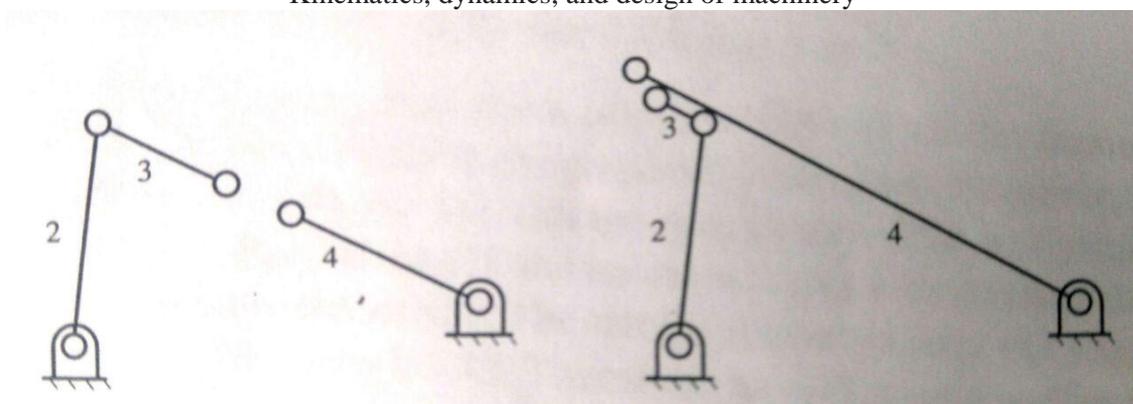
Para não deixar a leitura deste trabalho cansativa, foi ocultadas as equações que representariam a posição, velocidade e aceleração caso uma dessas barras seja aquela que movimenta todo o sistema. As equações que as representam são encontradas de



forma análoga a forma feita com a barra 2. É importante ressaltar que ao escolher uma barra, você conhece todos os seus parâmetros, isso é, posição, velocidade e aceleração, e claro, a barra 1 sempre terá sua posição conhecida, por ser fixa.

Devemos sempre nos atentar ao fato de que a variável  $t$  da “Equação (15)” pode ser um número complexo, então o nosso sistema não estará linkado em todos os pontos que deveria. É importante lembrar que a “Equação (15)” é válida apenas quando a barra 2 for a que move o sistema, mas foi citada aqui pois nesses outros dois casos encontraremos equações semelhantes em que teremos o mesmo fato acontecendo. Caso  $t$  seja uma variável complexa, o sistema fica conforme a figura 2.

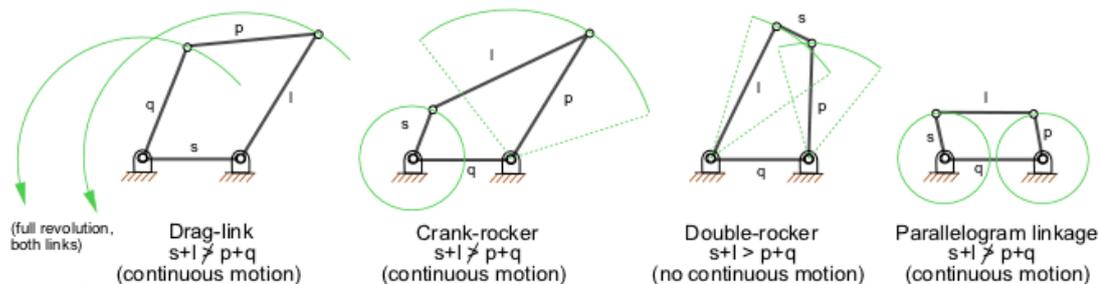
Figura 2: Configuração do mecanismo caso  $t$  seja uma variável complexa. Fonte: livro Kinematics, dynamics, and design of machinery



### Lei de Grashof

A lei de Grashof determina a dimensão das barras para que a menor barra sempre gire 360°. A lei de Grashof diz que “A soma do comprimento da maior e da menor barra de um mecanismo quatro barras não pode ser maior que a soma das outras duas barras”. Caso essa lei não seja satisfeita, as barras realizaram o movimento de um balancim-duplo. Como descrito na figura 3.

Figura 3: movimento realizado pelo sistema conforme as dimensões das barras. Fonte: <http://www.ebah.com.br/content/ABAAAARFoAD/lei-grashof>





## 2.2. Modelagem computacional

A modelagem computacional foi realizada conforme as equações demonstradas e sempre visando a maior variedade de opções para o usuário. Ao iniciar o programa, será exibida a figura 1, para que o usuário tenha conhecimento do nome das variáveis, logo após isso, é pedido para que escolha a barra que movimenta o sistema, o programa sempre avisará o usuário caso tenha algum dado de entrada errado, como por exemplo, a barra motora escolhida é a 1. Após isso é pedido as dimensões das barras, pois não é variável, então determinar as dimensões não é algo de grande complexidade. Pede-se também o ângulo que a barra 1 e a que movimenta o sistema faz com a horizontal, além de ser valor de entrada a velocidade e aceleração da barra motora. Com isso, é calculada a posição, velocidade e aceleração dos pontos P, Q e R e das outras duas barras que não foram informados os ângulos. Já temos as dimensões e ângulos necessários, então para criar um gráfico, variamos o ângulo da barra motora, assim sendo, conseguimos o gráfico da posição, velocidade e aceleração em função do ângulo da barra motora.

Figura 4: Dados de entrada. Fonte: o autor

```
ATENÇÃO: as dimensões devem estar em metros e os ângulos em radianos

Escolha a barra (2,3 ou 4) que movimenta o sistema: 2

Informe a dimensão de cada barra:
Barra 1: 0.1
Barra 2: 0.2
Barra 3: 0.35
Barra 4: 0.4

Informe o ângulo entre a barra 1 e o eixo x: 0
Informe o ângulo entre a barra 2 e o eixo x: 0.2
Informe a variação do ângulo da barra 2 (rad/s): 0.15

fx Informe a aceleração da barra 2 (rad/s^2): 0.1
```

Figura 5: resultados dos Pontos. Fonte: o autor

```
Ponto Q
Posição: 0.19601i 0.039734j (m)
Velocidade: -0.0059601i 0.029402j (rad/s)
Aceleração: -0.0083837i 0.018707j (rad/s^2)

Ponto P
Posição: 0.19025i 0.38969j (m)
Velocidade: -0.11892i 0.027541j (rad/s)
Aceleração: 0.023564i -0.043695j (rad/s^2)

Ponto R
Posição: 0.1i 0j (m)
Velocidade: 0i 0j (rad/s)
Aceleração: 0i 0j (rad/s^2)
```



Figura 6: Resultados das barras. Fonte: o autor

Barra 1

Dimensão: 0.1 m

Ângulo em relação ao eixo x: 0 rad ou 0°

Velocidade: 0 rad/s

Aceleração: 0 rad/s<sup>2</sup>

Barra 2

Dimensão: 0.2 m

Ângulo em relação ao eixo x: 0.2 rad ou 11.4592°

Velocidade: 0.15 rad/s

Aceleração: 0.1 rad/s<sup>2</sup>

Barra 3

Dimensão: 0.35 m

Ângulo em relação ao eixo x: -1.5543 rad ou -89.056°

Velocidade: -0.32279 rad/s

Aceleração: 0.093008 rad/s<sup>2</sup>

Barra 4

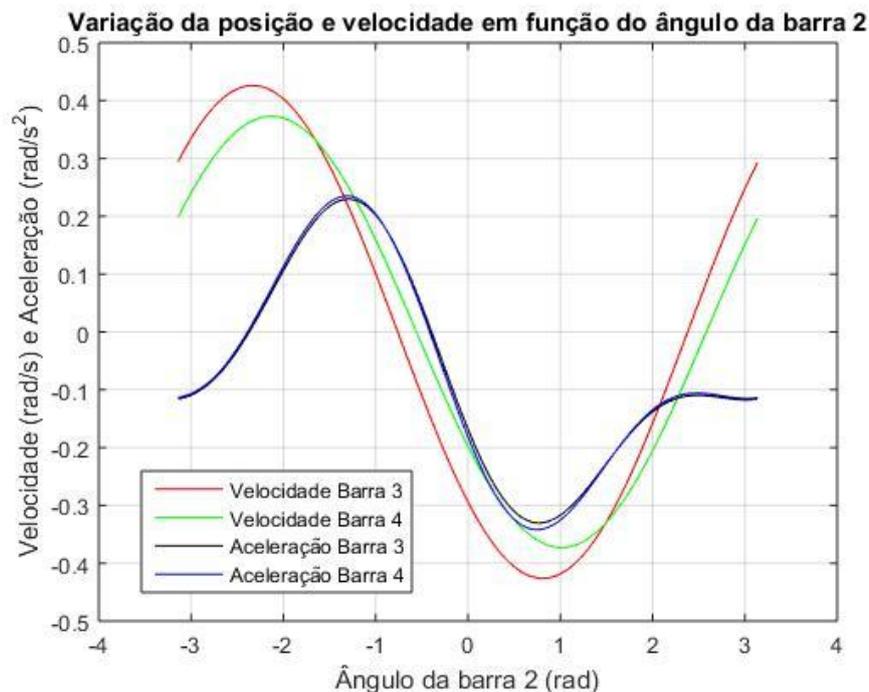
Dimensão: 0.4 m

Ângulo em relação ao eixo x: 1.3432 rad ou 76.9608°

Velocidade: 0.30517 rad/s

Aceleração: -0.082036 rad/s<sup>2</sup>

Figura 7: Resultado gráfico. Fonte: o autor



Organização

Promoção



### 3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento de um programa que analise cinematicamente o mecanismo quatro barras é importante, pois permite conhecer melhor esse mecanismo e então tem-se certeza, ao projetar um sistema como esse, que se obterá os parâmetros desejados.

Através do modelo matemático, o programa deve exibir os dados de entrada e os resultados, além de ter a capacidade de informar o usuário sobre algum dado errado.

### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

#### *Livros:*

Waldron, K. J., Kinzel, G. L., & Agrawal, S. K. *Kinematics, dynamics, and design of machinery*. John Wiley & Sons. 2016.

CHAPMAN, Stephen J. *Programação em MATLAB para engenheiros*. 2003.

#### *Internet:*

GONZÁLEZ, Dario, ESTRADA, Eduardo. **Aplicativo de análise do mecanismo quatro barras**. Disponível em:

<<https://www.uniatlantico.edu.co/uatlantico/noticias/estudiantes-de-ingenier-mec-nica-de-uniatl-ntico-dise-aplicaci-n-android>> Acesso em: 17 jun. 2017.

## CINEMATIC AND COMPUTATIONAL ANALYSIS OF A FOUR BARS MECHANISM

**Abstract:** *This work kinetically analyzes the position, speed and acceleration of each bar and some important points of the four bar mechanism. For this, a mathematical model was developed that expresses each condition of the system movement. For this, a computer program was developed that meets several specifications, such as: mathematical limitation, bar dimensions. In it the user is warned if he enters any wrong value. This makes the analysis more accurate and reliable. It is discussed, briefly, about the law of Grashof for this type of mechanism, which brings back knowledge of the movement that the system will perform. Therefore, the importance of this analysis is to know better this mechanism in order to bring greater confidence when designing a four-bar mechanism.*

**Key-words:** *Mechanisms, Four Bars, Kinematics, Computational analysis*

Organização



**UDESC**  
UNIVERSIDADE  
DO ESTADO DE  
SANTA CATARINA



Promoção

